Gleichmäßige Verteilung von Punkten auf der Einheitskugel [1]

Lienhard Wimmer

20.Februar 1992

[1]Diplomarbeit zur Erlangung des Magistergrades an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Unisersität Salzburg

Inhaltsverzeichnis

0.1 Einleitung

Das Schlüsselwort im Thema der vorliegenden Diplomarbeit ist das Wort "gleichmäßig". Da es keine allgemeinverbindliche Definition gibt, die alle Aspekte umfaßt, kann man das gegebene Thema nur so behandeln, daß man verschiedene Gleichmäßigkeitsforderungen stellt und versucht, für die jeweils gültige Gleichmäßigkeitsforderung optimale Punktanordnungen zu ermitteln, wobei man sich oft mit Abschätzungen zufrieden geben muß.

In dieser Arbeit werden vor allem folgende Gleichmäßigkeitsforderungen gestellt:

- Auf der Kugel sind n Punkte so zu verteilen, daß der Minimalabstand zwischen je zwei von ihnen möglichst groß wird.
- Auf der Kugel sind n Punkte so zu verteilen, daß der (sphärische) Abstand von jedem Punkt der Kugeloberfläche zu einem der gegebenen Punkte möglichst klein wird.
- Auf der Kugel sind n Punkte $x_1, ..., x_n$ so zu verteilen, daß für ein festes Maß μ, für eine geeignete Klasse ϕ von Funktionen f und für eine geeignet festgelegte Norm $\| \,.\, \|$ das Funktional

  $$\| \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(x_i) - \int_{S^{d-1}} f \, d\mu \|$$

  möglichst klein wird.
- Die Kugel ist in verschiedener Hinsicht (Oberfläche,Volumen,mittlere Breite ...) durch ein n-eckiges (n-flächiges) Polytop bestmöglich zu approximieren.

Am bedeutendsten ist die dritte Forderung, da sie verschiedene Diskrepanzbegriffe der stochastischen Zahlentheorie sowie Fragen der numerischen Integration, der Energiesummen und der Approximation beinhaltet.

Kapitel 1

Lagerungen auf der 3-Sphäre

1.1 Problemstellung und Definitionen

Im Jahre 1930 entdeckte der Biologe Tammes [83], daß sich auf Pollenkörnern die Austrittsöffnungen der Pflanzenkeime so anordnen, daß der Minimalabstand zwischen je zwei von ihnen möglichst groß wird ["Tammes'sches Problem"] [*s.*29,30,63,83].
Die zugrundeliegende Fragestellung lautet: *Wie kann man auf der Kugel n Punkte so verteilen, daß der Minimalabstand zwischen je zwei von ihnen möglichst groß wird ?*
Umgekehrt kann man sich die Frage stellen: *Wie kann man auf der Kugel n Punkte so verteilen, daß der (sphärische) Abstand von jedem beliebigen Punkt der Kugel zu einem der gegebenen Punkte möglichst klein wird ?*
Der sphärische Minimalabstand in der ersten Fragestellung sei 2ρ. Dann können wir um jeden der n Punkte einen (offenen) Kreis mit Radius ρ legen, sodaß niemals zwei dieser Kreise einen inneren Punkt gemeinsam haben. Ein beliebiger Punkt der Kugel kann dann zu höchstens einem Kreis gehören.

Beim zweiten Problem können wir um jeden der n Punkte einen (abgeschlossenen) Kreis mit Radius ρ ziehen, sodaß jeder Punkt der Kugeloberfläche mindestens einem der Kreise angehört.

Auf der Sphäre heißt eine Menge von (offenen) Kreisen *Unterdeckung* der Sphäre, wenn jeder Punkt der Sphäre höchstens einem Kreis angehört. Eine Menge von (abgeschlossenen) Kreisen auf der Sphäre heißt *Überdeckung* der Sphäre, wenn jeder Punkt der Sphäre zu mindestens einem Kreis gehört.

Um die *Dichte* einer Lagerung, das heißt die Dichte einer Unter- oder einer Überdeckung, zu berechnen, berechnen wir die Summe der Oberflächen der Kreise der Lagerung und dividieren dann durch die Gesamtoberfläche der Kugel, das ist 4ρ. *s.*[29]

Da sich der Inhalt einer Kugelkappe mit Radius ρ ausdrücken läßt durch $J(\rho) = 2\pi \cdot (1 - \cos\rho)$, gilt für die Dichte einer Lagerung von n kongruenten Kreisen: $\delta_n = \frac{n \cdot J(\rho)}{4\pi} = \frac{n}{2} \cdot (1 - \cos\rho)$.

Da wir nur Lagerungen kongruenter Kreise betrachten, so vereinbaren wir, daß eine " Unterdeckung vom Radius r " stets eine Unterdeckung der Sphäre durch kongruente Kreise vom Radius r sei und daß eine " Überdeckung vom Radius R " stets eine Überdeckung der Sphäre durch kongruente Kreise vom Radius R sei.

Wir suchen nun also zu jeder natürlichen Zahl $n[> 2]$ die Unterdeckung der Sphäre durch n kongruente Kreise mit größtmöglichem Radius und größtmöglicher Dichte.

Weiters suchen wir zu jedem n die bestmögliche (optimale) Überdeckung der Sphäre, das heißt die Überdeckung mit kleinstmöglichem Radius und kleinstmöglicher Dichte.

Den Radius der optimalen Unterdeckung bezeichnen wir mit r_n, und ihre die Dichte mit d_n [sie ist klarerweise stets < 1].

Den Radius der optimalen Überdeckung bezeichnen wir mit R_n und ihre die Dichte mit D_n [sie ist klarerweise stets > 1].

Obwohl die Probleme zueinander dual sind, wurde vor allem das Unterdeckungsproblem untersucht; auch wir wollen uns vor allem mit ihm beschäftigen.

Auf einen Zusammenhang des Unterdeckungsproblemes mit Fragen der Informationstheorie hat v.d. Waerden [95] hingewiesen.

1.2 Aus der Polyedergeometrie

Bevor wir uns mit Lagerungsproblemen befassen können, müssen wir uns zunächst mit einigen Ergebnissen der Polyedergeometrie vertraut machen.

Eine Menge heißt *konvex*, wenn in ihr mit je zwei Punkten auch stets deren Verbindungsstrecke enthalten ist. Konvexe Mengen, die kompakt sind und ein nichtleeres Inneres besitzen, heißen *konvexe Körper*.

Unter einem *konvexen Polytop P* verstehen wir einen Durchschnitt von endlich vielen Halbräumen H_i, die bis auf Permutationen eindeutig bestimmt sind. Es ist dann:

$$P = \cap_{i=1}^{m} H_i$$

Hat der einbettende Raumes die Dimension 2, so sprechen wir von *Polygonen*, hat er die Dimension 3, sprechen wir von *Polyedern*.
Zu jedem Polytop gibt es ein *duales Polytop*. Das zu einem Polytop P duale Polytop P^* entsteht als Schnitt der Halbräume $H_i' := \{\mathbf{x} : P_i \cdot \mathbf{x} \leq 1\}$, die zu den Ecken von P in Bezug auf die Sphäre S^{d-1} ´polar´ sind: $P^* = \cap_{i=1}^{m} H_i'$.

Analytisch läßt sich das duale Polytop beschreiben durch:

$$P^* = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1 \ \forall \mathbf{y} \in P\}$$

Mit $\{P_1, .., P_m\}$ bezeichnen wir hier die Eckpunkte von P; weiters wird mit P_i auch der zum Punkt P_i gehörige Ortvektor bezeichnet.

Es gilt, daß das duale Polyeder eines Polyeders mit e Ecken und f Flächen stets ein f-eckiges und e-flächiges Polyeder ist.
Die obige Dualitätsdefinition kann wörtlich auf die Menge $\mathcal{K}$ der konvexen Körper übertragen werden. Es sind duale Mengen konvexer Körper stets wieder konvexe Körper und es gilt [51]:

$$K^{**} = (K^*)^* = K \; \forall K \in \mathcal{K}$$

Wir betrachten nun eine endliche Anzahl von Halbkugeln auf der Sphäre. Besitzt ihr Durchschnitt Q innere Punkte, so heißt Q *konvexes sphärisches Vieleck*, bzw. konvexes sphärisches Polygon. Der Flächeninhalt eines konvexen, sphärischen n-Eckes mit Winkeln $\alpha_1, .., \alpha_n$ ist gegeben durch $\alpha_1 + .. + \alpha_n - (n-2) \cdot \pi$. Daher ist der Flächeninhalt eines Dreiecks auf der Einheitskugel mit den Winkeln α,β,γ gegeben durch $\alpha + \beta + \gamma - \pi$.

Ist ein konvexes Polyeder P des $\mathbb{R}^3$ mit f Flächen, k Kanten und e Ecken gegeben, so können wir um jeden inneren Punkt O eine Einheitskugel schlagen und die Flächen des Polyeders auf die Kugeloberfläche projizieren. So erhalten wir auf der Kugeloberfläche sphärische Vielecke, die diese *schlicht* überdecken: jeder Punkt der Sphäre liegt im Inneren von höchstens einem und in der abgeschlossenen Hülle von mindestens einem Vieleck dieser Projektion. Eine schlichte Überdeckung der Kugel durch Polygone heißt auch *Mosaik*.

Wir wenden nun die obige Flächeninhaltsformel für sphärische konvexe n-Ecke auf jedes Vieleck der Projektion an und summieren über alle Vielecke.
Da die Kugeloberfläche $[4 \cdot \pi]$ gleich groß ist wie die Summe der Projektionsflächen [das ist $2\pi \cdot e - 2\pi \cdot 3k + 2\pi \cdot f$], erhalten wir die Euler'sche Polyederformel

$$f + e = k + 2. \tag{1.1}$$

In jedem Polyeder ist $3f \leq 2k$, und $3e \leq 2k$, da jede Fläche von mindesten drei Kanten begrenzt ist, und in jeder Ecke mindestens drei Kanten zusammentreffen. Dabei wird insgesamt jede Kante doppelt gezählt. Aus der Euler'schen Formel und aus diesen Ungleichungen folgt: $k + 6 \leq 3f \leq 2k$ und $k + 6 \leq 3e \leq 2k$. Bezeichnet $p = 2k/f$ die mittlere Seitenanzahl einer Fläche und bezeichnet $q = 2k/e$ mittlere Kantenanzahl einer Ecke, so gelten die Ungleichungen:

$$p \leq 6 - 12/f < 6 \tag{1.2}$$

$$q \leq 6 - 12/e < 6 \tag{1.3}$$

$$1/p + 1/q < 1/2. \tag{1.4}$$

Eine Polyederfläche wollen wir *regelmäßig* nennen, wenn sie durch ein reguläres Polygon, d.i. ein Polygon mit gleich großen Winkeln und gleich großen Seiten, gebildet wird. Eine Ecke nennen wir regulär, wenn aus einer

Kugel um diese Ecke, die weder auf ihrem Rand noch in ihrem Inneren weitere Polyederecken enthält, durch die angrenzenden Seitenflächen stets ein reguläres sphärisches Polygon herausgeschnitten wird. Besitzt ein Polyeder nur reguläre Ecken und nur reguläre Flächen , so sprechen wir von einem regulären Polyeder oder *Platonischen Körper*. Diesen Körpern schreibt Plato in seiner "Ideenlehre" - als Muster der Vollendung - besondere Eigenschaften zu.
Da bei ihnen alle Flächen regulär sind, müssen alle Flächen gleich viele Ecken besitzen; analogerweise treffen sich in jeder Ecke gleich viele Kanten. Daher wird ein platonischer Körper, bei dem jede Fläche p die Ecken und jede Ecke q Kanten besitzt, üblicherweise mit dem Symbol p,q bezeichnet.

Wegen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{2}$ gibt es im $\mathbb{R}^3$ nur folgende reguläre Körper :

reguläres	Tetraeder	$\{3,3\}$
reguläres	Hexaeder (Würfel)	$\{3,4\}$
reguläres	Ikosaeder	$\{3,5\}$
reguläres	Oktaeder	$\{4,3\}$
reguläres	Pentagon-Dodekaeder	$\{5,3\}$

Auch die Dualkörper der regulären Körper sind regulär, da durch die Dualitätstransformation aus regulären Flächen reguläre Ecken und aus regulären Ecken reguläre Flächen werden.

Es gilt: Das Tetraeder ist sein eigener Dualkörper, der Würfel ist der Dualkörper der Oktaeders, das Oktaeder ist der Dualkörper der Würfels, das Ikosaeder ist der Dualkörper des Pentagon-Dodekadeders und das Pentagon-Dodekaeder ist der Dualkörper des Ikosaeders.
Als nächste Klasse bieten sich zur Untersuchung die Polyeder an, die entweder nur reguläre Flächen oder nur reguläre Ecken besitzen. Von größerem Interesse sind für uns die Polyeder mit regulären Flächen.
Sind ihre Ecken zueinander kongruent, so heißen sie Archimedische Körper und werden üblicherweise mit (i,j,k,..) bezeichnet. Diese Schreibweise besagt, daß in einer Ecke ein i-, dann ein j-, dann ein k-Eck usw. zusammentreffen. [Die Struktur der Flächen, die sich um eine Ecke gruppieren, ist überall gleich.]
Die meisten Archimedischen Körper kann man aus den Platonischen dadurch konstruieren, daß man die Ecken in geeigneter Weise " kappt" . Einen Überblick über die in $\mathbb{R}^3$ vorhandenen Archimedischen Körper gibt die folgende Tabelle, die nur die 15 nichtentarteten Fälle enthält [30]:

Bezeichnung	e	f	k	Bezeichnung
(3,6,6)	12	8	18	abg. Tetraeder
(3,8,8)	24	14	36	abg. Hexaeder
(3,10,10)	60	32	90	abg. Ikosaeder
(4,4,n)	2n	n+2	3n	arch. Prisma
(4,6,6)	24	14	36	abg. Oktaeder
(4,6,8)	48	26	72	abg. Kuboktader
(4,6,10)	120	62	180	abg. Ikosidodekaeder
(5,6,6)	60	32	90	abg. Dodekader;” Fußball”
(3,3,3,n)	2n	2n+2	4n	arch. Antiprisma
(3,4,3,4)	12	14	24	Kuboktaeder
(3,4,4,4)	24	26	48	Rhombenkuboktaeder
(3,4,5,4)	60	62	120	Rhombenikosidodekaeder
(3,5,3,5)	30	60	32	Ikosidodekaeder
(3,3,3,3,4)	24	38	60	abgeschrägtes Hexaeder
(3,3,3,3,5)	60	92	150	abgeschrägtes Dodekaeder

[abg. =” abgestumpftes ” , arch. = ” archimedisches ”]
Die Klasse der halbregulären Körper mit regulären Ecken (sie enthält z.B. das Rhombendodekaeder) entsteht durch Dualitiätstransformation aus der Klasse der Archimedischen Körper.
Sind auf einer Sphäre n Punkte $\{P_1, .., P_n\}$ gegeben, so können wir aus ihnen unter anderem auf folgende zwei Arten Polyeder konstruieren:

- Wir bilden die *konvexe Hülle* $conv\{P_1, .., P_n\}$, dh. die Menge

$$P = \{\mathbf{x} \in \mathrm{I\!R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P_i \texttt{ mit } \sum \lambda_i = 1 \texttt{ und } 0 \leq \lambda_i \leq 1 \ \forall i\}.$$

  Die konvexe Hülle $P = \texttt{conv}\{P_1, .., P_n\}$ ist bekanntlich [51] die kleinste konvexe Menge, die $\{P_1, .., P_n\}$ enthält und ist in unserem Fall - da alle Punkte auf der Kugel liegen - stets der Kugel einbeschrieben. Zerlegen wir das so erhaltene Polyeder durch Diagonalen in Dreiecke und projizieren wir dieses Dreickspolyeder auf die Kugel, so entsteht das n-eckige Mosaik der *Standardtriangulierung* der Kugeloberfläche in *zulässige* Dreiecke [*s.* I.3].

- Wir legen durch jeden Punkt der Menge $\{P_1, .., P_n\}$ die Tangentialebene an die Kugel. Die Ebenen zerlegen den umgebenden Raum in Halbräume, von denen wir diejenigen miteinander schneiden, die den

Kugelmittelpunkt enthalten. Das so erhaltene Polyeder, das wir den *Tangentialkörper* nennen wollen, ist stets der Kugel umschrieben.
Projizieren wir das Tangentialpolyeder auf die Kugeloberfläche, so entsteht die Zerlegung der Sphäre in die *Dirichlet'schen Zellen* der Punkte $\{P_1, .., P_n\}$. Die Dirichlet'sche Zelle eines Punktes P aus dieser Menge ist dabei definiert als die Menge aller Punkte der Kugeloberfläche, deren Abstand zu diesem Punkt kleiner ist als der Abstand zu irgend einem anderen Punkt der Punktmenge $\{P_1, .., P_n\}$.
Die Zerlegung in Dirichlet'sche Zellen kann man stets als Dreikantmosaik auffassen.

1.3 Reguläre Lagerungen

Wir beginnen nun mit der Untersuchung des Lagerungsproblems und führen dazu folgende Bezeichnungen ein:
Eine Unterdeckung vom Radius r soll r-gesättigt heißen, wenn man einen weiteren Kreis vom Radius r nur dadurch unterbringen kann, daß man ihn mit einem bereits vorhandenen schneidet.
Da wir eine nicht gesättigte Unterdeckung durch Hinzufügen weiterer Kreise sättigen können, dürfen wir o.B.d.A. stets annehmen, daß bereits eine gesättigte Unterdeckung vorliegt.
Die Standardtriangulierung einer r-gesättigten Unterdeckung soll im weiteren stets r-Triangulierung heißen, und besitzt folgende Eigenschaften [70]:

1. sie hat aufgrund des Euler'schen Polyedersatzes $f = k + 2 - e = 3 \cdot (n - 2) + 2 - n = 2n - 4$ Dreiecke.

2. Ein Umkreis eines Triangulierungsdreieckes kann keine weiteren Ecken des Mosaikes als innere Punkte enthalten.

3. Ist r' die Diagonale eines sphärischen Quadrates mit Seitenlänge 2r, so müssen zwei Punkte mit Abstand kleiner r' auf derselben Dreiecksseite liegen.,

4. Ein zulässiges Dreieck hat Seiten $\geq 2r$ und Umkreisradius kleiner $2r$; es gilt auch die Umkehrung.

5. Bezeichnen wir mit ρ_r den Winkel eines gleichseitigen Dreieckes mit Seitenlänge 2r. [Aus dem sphärischen Kosinussatz folgt die Formel $\cos \rho_r = \frac{\cos 2r}{1+\cos 2r}$], so kann man beweisen, daß der Winkel eines zulässigen Dreieckes stets zwischen $\rho_r/2$ und $2\rho_r$ liegen muß, ohne allerdings die Werte $\rho_r/2$ und $2\rho_r$ erreichen zu können [70].

Besitzt ein sphärisches Dreieck Seitenlängen $\geq r$ und einen festen Winkel θ, so ist die kleinstmögliche Fläche des Dreiecks gegeben durch:

$$A(\theta) = \begin{cases} \Delta(2\theta) & f\ddot{u}r\ \rho_r/2\ \leq \theta\ \leq \rho_r \\ \Delta(\theta) & f\ddot{u}r\ \rho_r\ \leq \theta\ \leq 2\rho_r \end{cases}$$

Hierbei bezeichnet $\Delta(\omega)$ den Flächeninhalt eines sphärischen, Dreieckes mit zwei Seiten der Länge 2r und dem von ihnen eingeschlossenem Winkel ω. Die Funktion it A ist konkav in den Intervallen $[\rho_r/2,\rho_r]$ und $[\rho_r,2\rho_r]$ und kann daher ihren Minimalwert nur an den Stellen $\rho_r/2$, ρ_r oder $2\rho_r$ annehmen. Da $A(\rho_r/2) = A(\rho_r) = A(2\rho_r) = \Delta(\rho_r) = 3\rho_r - \pi$ ist und da $[s.\text{(v)}]$ von diesen drei Werten nur ρ_r auftreten kann, ist unter allen gleichschenkeligen Dreiecken das gleichseitige das Dreieck, das die kleinste Fläche besitzt. Diese Fläche werden wir im weiteren stets mit $\Delta_2 r$ $[= \Delta(\rho_r) = 3\rho_r - \pi]$ bezeichnen.
Da die r-Triangulierung $[s.\text{(i)}]$ aus 2n-4 Dreiecken besteht, und da " Anzahl der Dreiecke mal Minimalfläche" kleiner gleich der Kugeloberfläche 4π sein muß, folgt:

$$(2n-4)\cdot\Delta_r \leq 4\pi \tag{1.5}$$

Wir setzen in diese Ungleichung $\Delta_r = 3\rho_r - \pi$ ein und erhalten:

$$3\rho_r - \pi \leq 4\pi/(2n-4) = 2\cdot\pi/(n-2)$$

$$3\rho_r \leq 2\cdot\frac{\pi}{n-2} + \pi = (2\pi + n\cdot\pi - 2\pi)/(n-2) = \pi\cdot\frac{n}{n-2}$$

$$\rho_r/2 \leq \gamma_n := \frac{\pi}{6}\cdot\frac{n}{n-2}$$

Wegen $\cos\rho_r = \cos 2r/(1+cos2r)$ erhalten wir aus $\rho_r \leq 2\gamma_n$:

$$\cos 2r \geq (\cos 2\gamma_n)\cdot(1+\cos 2r) = \cos 2\gamma_n + (\cos 2r)\cdot(\cos 2\gamma_n)$$

$$\cos 2r geq \frac{\cos 2\gamma_n}{1-\cos 2\gamma_n} = \frac{\cos^2\gamma_n - \sin^2\gamma_n}{1-(1-2\sin^2\gamma_n)} = \frac{\cos^2\gamma_n - \sin^2\gamma_n}{2\sin^2\gamma_n} = \frac{\cot^2\gamma_n - 1}{2}$$

Zusammenfassend erhalten wir die Ungleichung von Fejes-Tóth für den sphärischen Abstand in einer Unterdeckung [29], [30]:

$$\cos 2r \geq (\cot^2\gamma_n - 1)/2 \tag{1.6}$$

Diese Ungleichung besagt für den sphärischen Minimalabstand b_n:

$$\limsup_{n\to\infty}\ b_n\cdot\sqrt{n} \leq \sqrt{8\pi/\sqrt{3}} = 3,80 \tag{1.7}$$

Wählt man die n Punkte jedoch aus einer unendlichen Folge $P_1, P_2, ...$ auf S^2 aus, so gilt für deren sphärischen Minimalabstand b_n [35]:

$$\liminf_{n\to\infty}\ b_n\cdot\sqrt{n} \leq \frac{2}{\sqrt{\log 4 - 1}} = 3,22.. \tag{1.8}$$

Für die Ungleichung (2) gibt es zumindest fünf verschiedene Beweise [29,30,39,70], darunter folgende zwei:

(*1*) Wir zerlegen die Sphäre in Dirichlet'sche Zellen und wenden den auf das dadurch erhaltene Dreikantmosaik folgende Ungleichung an:

Es seien $S_1..S_n$ die Flächen eines Mosaikes, O_i sei ein Punkt der Fläche S_i. Weiters bezeichne e die Anzahl der Ecken und k die Anzahl der Kanten des Mosaikes. $D = D(\text{ABC})$ sei ein Dreieck mit den Ecken A, B, C und den zugehörigen Winkeln $\alpha = (\pi n)/(2k)$, $\beta = (\pi e)/(2k)$ und $\gamma = \pi/2$. g sei eine auf $[0, \pi]$ definierte, nicht-zunehmende Funktion und dP das Flächenelement des variablen Punktes P. Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{S^i} g(\overline{O_i P})\, dP \leq 4k \cdot \int_D g(\overline{AP})\, dP \tag{1.9}$$

Ist g nicht-abnehmend, so gilt die Ungleichung in umgekehrter Richtung.]

Wir setzen $g(x) = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ 0 \ \leq x \ \leq r_n \\ 0 & f\ddot{u}r\ r_n \ \leq x \end{cases}$ und verwenden das Dreikantmosaik der Dirichlet'schen Zellen Z_i der Kreismittelpunkte P_i einer Lagerung mit Radius r_n.

Da für alle Punkte, die sich nicht in einem Kreis der Lagerung befinden, g Null wird, wird derjenige Teil der Kugeloberfläche, der durch $n > 2$ Kreise vom Radius r_n überdeckt wird, dargestellt durch:

$$W := \sum_{i=1}^{n} \int_{Z_i} g(\overline{O_i P})\, dP$$

Analog dazu wird derjenige Teil des Dreieckes $D = D(\text{ABC})$, der durch einen um den Punkt A geschlagenen Kreis mit Radius ρ_r überdeckt wird, dargestellt durch:

$$w = \int_D g(\overline{AP})\, dP$$

Klarerweise besitzt das Dreieck D die Winkel $2\gamma_n$, $\pi/3$ und $\pi/2$.
Bezeichnen wir mit D auch den Flächeninhalt des Dreieckes D, so erhalten wir aus $4 \cdot k \cdot D = 4 \cdot (3n - 6) \cdot \frac{\pi}{6} \frac{n}{n-2} + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} - \pi = 4\pi$ und der Ungleichung (2) die Ungleichung :

$$W/(4\pi) \leq w/D. \tag{1.10}$$

Liegt eine Überdeckung mit Radius ρ vor, so enthält der Kreis um A mit Radius ρ das ganze Dreieck D und es gilt

$$1 = W/(4\pi) \leq w/D.$$

Diese Ungleichung enthält eine Abschätzung für R_n und D_n.
Analogerweise erhält man aus (6) eine Abschätzung für ein Unterdeckung

mit Radius r_n und Dichte d_n.
Diese Abschätzungen lauten nach Umformungen mit Formeln der sphärischen Trigonometrie [man beachte, daß $\csc x = \frac{1}{\sin x}$]:

- für das Unterdeckungsproblem :

$$\texttt{Dichte} \quad \texttt{d}_\texttt{n} \leq \frac{n}{2} \cdot (1 - \frac{1}{2} \cdot \csc \frac{\pi}{6} \cdot \frac{n}{n-2}) \tag{1.11}$$

$$\texttt{Radius} \quad \texttt{r}_\texttt{n} \leq \arccos(\frac{1}{2} \cdot \csc \frac{\pi}{6} \cdot \frac{n}{n-2}) \tag{1.12}$$

- für das Überdeckungsproblem :

$$\texttt{Dichte} \quad \texttt{D}_\texttt{n} \geq \frac{n}{2} \cdot (1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{n}{n-2}) \tag{1.13}$$

$$\texttt{Radius} \quad \texttt{R}_\texttt{n} \geq \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \cot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{n}{n-2}) \tag{1.14}$$

(*2*) Zu den bisherigen Konstruktionsmethoden eines sphärischen Mosaikes soll noch eine Methode angegeben werden, die auf jedem Raum konstanter Krümmung definiert ist [30, *S.*224ff]:

Wir denken uns auf der Kugel eine Lagerung von Kreisen mit Mittelpunkten $P_1, P_2, ...$ usw. gegeben. Liegt eine Unterdeckung vor, so können wir o.B.d.A. voraussetzen, daß sie gesättigt ist, liegt eine Überdeckung vor, so können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Kreise sich nirgends häufen, da wir ansonsten eine unendliche Dichte hätten. Einen Kreis, der in seinem Inneren keinen, auf seinem Rand aber zumindest drei der Kreismittelpunkte $P_1, P_2, ...$ enthält, wollen wir Stützkreis nennen. Die auf seinem Rand liegenden Kreismittelpunkte spannen ein konvexes Polygon, das Stützpolygon auf. Durch diese Polygone definieren wir nun iterativ ein Mosaik auf der Sphäre :
Ist AB Seite eines Stützpolygons, so liegt in der Halbkugel, die durch die Trägergerade von AB begrenzt wird, außer A und B mindestens noch ein weiterer Kreismittelpunkt C der Lagerung. Durch A, B und C muß es daher einen Stützkreis geben, und dadurch können wir an jede Seite des Ausgangspolygons ein weiteres Stützpolygon anschließen.
Zwei Stützpolygone greifen niemals übereinander. Denn einerseites können sich - aufgrund der Definition - die zugehörigen Stützkreise einander nicht enthalten, andererseits gibt es in ihrem Schnitt nur zwei Punkte A und B (das sind die Schnittpunkte der Kreisränder), die Kreismittelpunkte und somit Mosaikeckpunkte sein können. Daher werden die Stützpolygone durch die Gerade AB getrennt.
Starten wir bei einem beliebigen Stützpolygon und addieren auf jeder " freien" Seite ein weiteres, so muß dieser Prozeß abbrechen, sobald wir wieder " in die Nähe" des Ausgangspolygons kommen, da ansonsten die Packung

entweder nicht gesättigt wäre, oder einen Häufungspunkt besitzen müßte [30].

Nun untersuchen wir noch den Gleichheitfall in (1): Da das Dreieck mit kleinstem Flächeninhalt das gleichseitige Dreieck ist, kann in (1) das Gleichheitszeichen nur von Triangulierungen, die nur aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, eingenommen werden.

Solche Triangulierungen entstehen nur aus den regulären Dreieckspolyedern. Daher sind optimale Punktanordnungen:

für n = 3:	Ecken eines regulären Dreieckes,
für n = 4:	Ecken des regulären Tetraeders,
für n = 6:	Ecken des regulären Oktoeders,
für n = 12:	Ecken des regulären Ikosaeders

Da die Ungleichung (1) auch für das Überdeckungsproblem gilt [29], sind diese vier Anordnungen für beide Problemstellungen optimal. Es wurde bewiesen [31], daß es nur endlich viele natürliche Zahlen mit dieser Eigenschaft geben kann. Allerdings wurde bisher keine weitere Zahl, die diese Bedingungen erfüllt, entdeckt. Daher wird vermutet, daß die obigen vier Werte die einzigen Zahlen mit dieser Eigenschaft sind.

Nun könnte man aber nicht nur versuchen, Ungleichungen für den sphärischen Mindestabstand [wie $\cos 2r \geq (\cot^2 \gamma_n - 1)/2$] herzuleiten, sondern sich auch die Frage stellen, wie die (sphärischen) Abstände, die keine Mindestabstände sind, abgeschätzt werden können.

Andreás und Károly Bezdek [5] haben den zweitnächsten Abstand $s_2(n)$ untersucht und bewiesen, daß gilt [[x] sei das größte Ganze von x]:

- $s_2(5) = s_2(6) = \pi$; $s_2(9) = 2\pi/3$.
- für $n \geq 9$ ist

$$s_2(n) \leq \arccos \frac{1}{2}(\cot^2 \frac{[\frac{n+2}{3}]}{[\frac{n+2}{3}] - 2} \cdot \frac{\pi}{6} - 1) \leq 2 \cdot \arccos \frac{\cot^2 \gamma_n - 1}{2}.$$

1.4 Halbreguläre Lagerungen

Als ein wichtiges Hilfsmittel in der Untersuchung des Unterdeckungsproblemes hat sich folgender Graphen erwiesen:

Sind n Punkte auf der Kugeloberfläche gegeben, so verbinden wir diejenigen Punkte durch einen Großkreisbogen, die voneinander sphärischen Minimalabstand $2r_n$ haben. Das bedeutet, daß wir zwei Mittelpunkte verbinden, wenn sich die zugehörigen Kreise berühren. Die Kreismittelpunkte heißen nun *Ecken des Graphen*, die verbindenden Großkreisbögen wollen wir *Kanten des Graphen* nennen [29, 30, 63].

Zwei Kanten AB und CD des Graphen können einander nicht schneiden, denn sonst gilt, wenn S den Schnittpunkt von AB und CD bezeichnet:

$$4r_n = 2r_n + 2r_n = AB + CD = (AS + SC) + (BS + SD) > AC + BD > 4r_n$$

[In dieser Ungleichungskette verwenden wir die Dreiecksungleichung auf den Dreiecken $\Delta(ASC)$ und $\Delta(BSD)$.]
Unser Graph zerlegt die Kugel in offene, einfach zusammenhängende Gebiete, sogar in sphärische Polygone. Ein Polygon, das aus m Kanten und m Ecken gebildet wird, zerlegt die Sphäre in zwei Teile. Enthält eines dieser Teilgebiete keine weitere Kante des Graphen, so soll es *m-Eck* heißen.
Der *Grad einer Ecke* P sei die Anzahl der Kanten, die in diesem Eckpunkt P zusammentreffen. Ist der Grad 0, so heißt die Ecke *isoliert.* Hat eine Ecke den Grad 1 oder 2, so hat sie noch genügend " Bewegungsfreiheit", sodaß wir sie isolieren können. Daher können wir o.B.d.A. annehmen, daß der Graph keine Ecken vom Grad 1 oder 2 enthält.
Einen Graph, der keine Verschiebungen mehr zuläßt, durch die man alle Punkte isolieren kann, nennen wir *irreduzibel.*
In einem irreduziblen Graphen können nur Winkel kleiner π auftreten [29]. Enthält der Graph ein m-Eck, so ordnen wir diesem ein umfanggleiches sphärisches Dreieck zu. Da jedes vorkommende m-Eck gleichlange Seiten hat $[= 2r_n]$, ist sein Umfang gleich $2r_n \cdot m$. Weiters ist der Umfang eines sphärischen Dreiecks stets kleiner 4π, und daraus schließen wir, daß ein irreduzibler Graph, der ein m-Eck enthält, einen Radius $r_n < \frac{\pi}{m}$ hat.
Wegen $2r_{12} = 72°$ bestehen daher die Graphen für $6 < n < 12$ nur aus Drei- und Vierecken. Diese Graphen enthalten weiters keine isolierten Punkte, da in jedem gleichseitigen Drei- oder Viereck mit Seitenlänge 2r der Abstand von jedem inneren Punkt zu einem Eckpunkt stets kleiner 2r ist.
Bezeichnet $\Delta(\theta)$ den Flächeninhalt eines gleichschenkeligen Dreieckes mit gleichlangen Seiten der Länge a und dem von ihnen eingeschlossenem Winkel θ, so ist $\Delta(\theta)$ eine konkave Funktion:

$$\Delta(\theta) = 2 \cdot (\pi/2 - \arctan(\cos a \cdot \tan \frac{\theta}{2})) + \theta - \pi$$

$\Delta_r := \Delta(\rho_r)$ sei der Flächeninhalt des gleichseitigen Dreieckes mit Seitenlänge r, $V(\beta)$ sei der Flächeninhalt eines Viereckes des Graphen mit Winkel β. Wie wir bereits [I.2] wissen, kann sich β nur zwischen $\rho_r/2$ und $2\rho_r$ bewegen. Da $V(\beta) = 2 \cdot \Delta(\beta)$ konkav ist, nimmt die Funktion $V(\beta)$ ihr Minimum nur in $\beta = \rho_r$ und $2\rho_r$ an.
Wird die Summe zweier Winkel $\beta_1 + \beta_2 = s$ festgehalten, so ist auch $V(\beta_1) + V(\beta_2) = V(\beta_1 + V(s - \beta_1)$ eine konkave Funktion, die ihren Minimalwert genau dann annimmt, wenn eines der beiden Vierecke in zwei Dreiecke zerfällt [30]. Treffen in einem reinen Drei- und Vierecksgraphen in einer Ecke d Drei- und v Vierecke zusammen (Die Viereckswinkel seien dabei $\beta_1, .., \beta_v$), so ist die Flächensumme aller Polygone, die sich dort treffen,

gleich $S = d \cdot \Delta_r + \sum_{i=1}^{v} V(\beta_i)$.
Auf diese Summe wenden wir die Überlegung des vorhergehenden Absatzes an, und erhalten, daß S genau dann minimal wird, wenn bis auf eine Ausnahme alle Vierecke des Graphen in Dreiecke zerfallen.
Bezeichnen wir mit β den Winkel des nicht zerfallenden Vierecks so gilt die Ungleichung:

$$S \geq (d + 2v) \cdot \Delta_r + U(\omega), \texttt{mit}\; U(\beta) := V(\beta) - 2\Delta_r.$$

[Dieses U ist der " Flächenüberschuß" des " störrischen" Vierecks gegenüber dem Minimalwert.]
Man kann β dadurch berechnen, daß man von 2ρ solange ρ_r abzieht, bis der "Rest" zwischen ρ_r und $2\rho_r$ liegt. Daher ist β nicht von der Anzahl der Drei- und Vierecke in dem betrachteten Eckpunkt abhängig; auch ist β in allen Eckpunkten gleich. Addiert man die obige Ungleichung über alle Ecken des Graphen, so erhält man:

$$\sum S = 3 \cdot S_3 + 4 \cdot S_4 \geq (3f_3 + 8f_4) \cdot \Delta_r + n \cdot U(\beta) + f_3 = 4 \cdot (f_3 + 2f_4) \cdot \Delta + n \cdot U(\beta),$$

wenn man mit S_k bzw. f_k die Inhaltssumme bzw. die Anzahl der k-Ecke bezeichnet. Wir ergänzen auf jeder Seite $S_3 = f_3 \cdot \Delta_r$, und erhalten:

$$4 \cdot 4\pi = 4 \cdot (S_3 + S_4) \geq (3f_3 + 8f_4) \cdot \Delta_r + n \cdot U(\beta) + f_3 \cdot \Delta_r = 4 \cdot (f_3 + 2f_4) \cdot \Delta_r + \frac{4}{4} \cdot n \cdot U(\beta).$$

Daher gilt:

$$4\pi = (f_3 + 2f_4) \cdot \Delta + \frac{1}{4} \cdot n \cdot U(\beta).$$

Hat der Graph k Kanten und f Flächen, so gilt nach der Eulerschen Polyederformel:

$$n - 2 = k - f = \frac{1}{2} \cdot (3f_3 + 4f_4) - (f_3 + f_4) = \frac{1}{2} \cdot (f_3 + 2f_4),$$

da jedes k-Eck k Seiten [=Kanten des Graphen] hat.

Mit der Bezeichnung $\Delta^* := \Delta(\beta)$ können wir die Ungleichung ausdrücken durch :

$$(2n - 4) \cdot \Delta_r + \frac{1}{2} \cdot n \cdot (\Delta^* - \Delta_r) \leq 4\pi \tag{1.15}$$

Gleichheit kann hier nur auftreten, wenn der Graph entweder nur Dreiecke oder in jeder Ecke genau ein Viereck enthält. Da der Viereckswinkel β auf der ganzen Sphäre gleich ist, sind alle auftretenden Vierecke regulär. Daher haben wir das Netz eines Archimedischen Körpers, der aus Drei- und Vierecken gebildet wird, vorliegen.

Es gibt nur zwei solche Körper, und zwar (3,3,3,4) [mit 8 Eckpunkten] und

(3,3,3,3,4) [mit 24 Eckpunkten]. Diese Polyeder stellen tatsächlich die optimalen Anordnungen für das Unterdeckungsproblem für n = 8 bzw. 24 dar. Für $n = 8$ reicht es zu zeigen, daß die obige Ungleichung scharf ist, für n = 24 benötigt man eine Verschärfung.
Eine solche stammt von Robinson [70] und besagt:
Ist $\beta = 2\pi - 4\rho$, $\Delta^* := \Delta(\beta)$ sowie $60^\circ < 2r_n < 72^\circ$, so ist

$$(2n-4)\cdot\Delta + \frac{2}{3}\cdot(n-6)\cdot(\Delta^* - \Delta) \leq 4\pi \tag{1.16}$$

Diese Ungleichung gilt für beliebige Graphen. Um die grundlegende Aussage: "Treffen in einer Ecke einer r-Triangulierung k Dreiecke zusammen, so ist die Gesamtfläche dieser Dreiecke stets $> 4\cdot\Delta_r + (k-4)\cdot\Delta^*$" beweisen zu können, benötigt Robinson [70] komplizierte Fallunterscheidungen, obwohl er im wesentlichen "nur" die obige Beweisidee der Bestimmung eines Maximums unter Nebenbedingungen verwendet. Durch Summation über alle Ecken und nach Umformungen erhält er dann das obige Resultat, aus dem die optimale Anordnung für $n = 24$ [Arch. Körper (3,3,3,3,4)] folgt.
Die Robinson'sche Methode ist aber mit dieser Ungleichung noch nicht völlig ausgeschöpft. Indem man die Dreiecksflächen, die sich um einen Punkt gruppieren, "reguliert" dh. indem man die Fläche von den zusammenstoßenden Dreiecken so "umverteilt" sodaß sie "gleichmäßiger" werden, kann man die genannte Ungleichung noch verfeinern.
Als neue Bezeichnung muß man dazu einführen: $\Delta' := \Delta(r')$, wobei r' die Länge der Diagonale eines sphärischen " Quadrates " mit Seiten der Länge 2r bezeichnet. Mit dieser Bezeichnungsweise erhält die zugrundeliegende Ungleichung die Gestalt, wenn k wiederum die Anzahl der Dreiecke um einen Punkt bezeichnet:

$$\texttt{regulierte Gesamtfläche} \geq 4\cdot\Delta_r + (2k-10)\cdot\Delta^* + (6-k)\cdot\Delta'.$$

Durch Summation über alle Ecken folgt daraus:

$$(2n-4)\cdot\Delta_r + \frac{2}{3}\cdot(n-6)\cdot(\Delta^* - \Delta_r) + 4\cdot(\Delta' - \Delta^*) \leq 4\pi, \tag{1.17}$$

eine Ungleichung, die auch für $n > 24$ gilt.
Ein zentraler Bestandteil der Ungleichung (2) ist die Tatsache, daß der Flächeninhalt T_4 eines regulären Vierecks stets $\geq 2\Delta_r$ ausfällt. Eine Verallgemeinerung dieser Ungleichung findet sich in [39], sowie [65]:
Besitzt ein reguläres n-Eck mit Seitenlänge $2r$ und Flächeninhalt T_n die Eigenschaft, daß je zwei seiner Ecken voneinander einen Abstand $\geq 2r$ haben, dann ist $T_n \geq (n-2)\cdot\Delta_r$.
Da wir in zwei Fällen optimale Anordnungen in den Graphen Archimedischer Körper gefunden haben, wird man vermuten, daß auch die anderen halbregulären Körper gute, wenn nicht gar optimale Anordnungen liefern.

Neuere Arbeiten (z.B. [47]) zeigen aber, daß diese Vermutung im allgemeinen nicht zutrifft. Die Klasse der halbregulären Körper mit regulären Ecken ist für unsere Betrachtungen uninteressant, da im Graphen nur gleichseitige Flächen vorkommen können, die die Polyeder dieser Klasse jedoch nicht besitzen.
Die bisherigen Überlegungen können wir zusammenfassen in:
Ist ein System von n Punkten auf der Sphäre gegeben, bei dem je zwei Punkte Mindestabstabstand $2r_n$ haben, so gilt [70]:

$$n < 2\pi/\Delta_r + 2 \tag{1.18}$$

$$n < 6 \cdot (\pi + \Delta^*)/(2\Delta_r + \Delta^*) \tag{1.19}$$

$$n < 6 \cdot (\pi + \Delta^* - \Delta)/(2\Delta_r + \Delta^*) \tag{1.20}$$

[Δ_r, Δ', Δ^* werden dabei wie oben verwendet]
Dadurch erhält man $n < \frac{4\pi}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{r_n} + C_0 + C_1 \cdot r_n^2 + ...$

$$\text{mit } C_0 = \begin{cases} 2 - \pi/3 \approx 0.1862 & für\ (1.18) \\ 2 - 7\pi/(3\sqrt{3}) \approx -2.2322 & für\ (1.19) \\ 2 - 7\pi/(3\sqrt{3}) - 4/sqrt3 \approx -2.5416 & für\ (1.20) \end{cases}$$

Wir können auch die sogenannten *zonalen Anordnungen* betrachten. Diese entstehen dadurch, daß man die Kugel durch äquidistante Parallelkreise in [z.B. m] Zonen einteilt. Die gewünschten Punktverteilungen entstehen dadurch, daß man eine ebene Verteilung der Ebene auf die Kugel abbildet [94]. Aus diesen zonalen Lagerungen erhält man [39, 76, 94]:

$$\frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot n \leq 4/r_n^2 \leq \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \cdot n + 3 \cdot (\frac{n}{4\pi})^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot (\frac{n}{4\pi})^{\frac{1}{3}}. \tag{1.21}$$

1.5 Symmetrische Lagerungen, Konstruktionen

Im vorigen Paragraphen fanden wir für zwei Werte von n die optimalen Anordnungen in den Ecken eines halbregulären Körpers.
Die Erweiterung der dort angewandten Methode auf Graphen, die auch Fünfecke besitzen, wird dadurch kompliziert, daß einerseits für m-Ecke mit $m \geq 5$ der Formelapparat stark anwächst und andererseits isolierte Punkte auftreten können. Interessierte seien auf den ersten Teil der Danzer'schen Habilitationsschrift [24] verwiesen, die eine Auflistung von Eigenschaften 'zulässiger' Fünfecke enthält.
Eine andere Möglichkeit, das Graphensystem zu untersuchen, ist die, die Punkte nach ihrem Grad zu sortieren. Wie wir bereits wissen, können wir in einem irreduziblen Graphen Punkte vom Grad 1 und 2 ausschließen, nicht hingegen isolierte Punkte.

K.Bezdek, R.Connelly und G.Kertész zeigten in [4], daß der durchschnittliche Grad einer Ecke gleich 5 ist. Robinson stellte sich die Frage, wie Graphen aussehen müssen, bei denen alle Ecken den Grad 5 haben [71]:
Wir nehmen an, daß die Sphäre durch ein Netz gleichseitiger Polygone zerlegt werde. Jedes Polygon habe Seitenlänge 2r und Diagonalen größer 2r. Außerdem sollen sich in jedem Eckpunkt genau fünf Polygone treffen, deren Winkel alle größer 60° sein müssen, wie man [71] entnimmt.
Da alle auftretenden Polygone gleichseitig sind, müssen alle Dreiecke in diesen Graphen sogar regulär sein. Wir bezeichnen mit ρ_r den Winkel eines gleichseitigen sphärischen Dreieckes mit Seitenlänge 2r.
Vierecke können, da sie gleichseitig sind, nur als Rhomben auftreten, bei denen die gegenüberliegenden Winkel gleich groß sind. Weiters ist bei den auftretenden Vierecken die Summe zweier benachbarter Winkel stets $> 180°$.
Bei Fünfecken gibt es mehrere Möglichkeiten, aber generell gilt, daß auch bei ihnen die Summe zweier benachbarter Winkel $> 180°$ sein muß [71].
Da sich in jeder Ecke fünf Winkel treffen, ist der größte Winkel, der im Polygonnetz auftreten kann, gleich $2\pi - 4\rho_r < 120°$. Sind in einer Ecke zwei Nicht-Dreiecke benachbart, das heißt, haben sie eine gemeinsame Kante, so verbrauchen ihre Winkel zusammen mehr als 180°. Den restlichen drei Winkeln bleibt dann weniger als 180° übrig. Das bedeutet aber, daß zumindest ein Winkel kleiner 60° sein muß. Somit kann dieser Fall niemals eintreten.
Es bleiben noch folgende Fälle zu unterscheiden:

- In jeder Ecke treffen sich nur Dreiecke.
- In jeder Ecke gibt es genau ein Nichtdreieck.
- In jeder Ecke gibt es genau zwei Nichtdreiecke.

Im ersten Fall muß $\rho_r = 72°$ sein, und wir erhalten das Netz eines Ikosaeders. Im zweiten Fall ist der Winkel des Nichtdreieckes gleich $2\pi - 4\rho_r$ und im dritten Fall addieren sich die Winkel der beiden Nichtdreiecke, die nicht benachbart sein können, zu $2\pi - 3\rho_r$.
Da $2\pi - 3\rho_r < 180°$ ist, muß im letzten Fall zumindest ein spitzer Winkel auftreten; dies schließt aber Fünfecke aus [71].
Durch genauere Fallunterscheidungen kam Robinson zu dem Ergebnis, daß es nur für n = 12, 24, 48, 60 und 120 Graphen mit festem Punktgrad fünf gibt [71].
Für festen Punktgrad drei oder vier ist diese Aufgabe nicht lösbar; Beispiele finden sich in [71].
Für die Lösungen der gestellten Aufgabe gibt Robinson auch Konstruktionsmethoden an, die nicht unerwähnt bleiben sollen:
Ausgangspunkt für die erste Methode ist das Mosaik $\{k, 3\}$ [k = 3,4,5] bei dem sich in jedem Punkt drei k-Ecke treffen.
Wenn wir die Seiten des Mosaikes "schrumpfen" lassen und zwischen ihnen

Quadrate einfügen, erhalten wir das Archimedische Mosaik (k,4,3,4).
Werden die Quadrate durch abwechselnde Diagonalen zerlegt und wird das gesamte Mosaik gedehnt, um die Kanten gleicher Länge zu erhalten, so entsteht das Archimedische Mosaik (k,3,3,3,3).
Genaugenommen gewinnen wir dieses Mosaik, indem wir in $\{k, 3\}$ die k-Ecke durch k-Ecke, die Kanten durch Dreieckspaare und die Ecken durch Dreiecke ersetzen. Es enthält folgende Teilgraphen:
Eine andere Konstruktionsmethode besteht darin, in $\{k, 3\}$ die Mittelpunkte aufeinanderfolgender Kanten zu verbinden. Dies gibt an der Stelle der bisherigen Ecken kleinere k-Ecke sowie Dreiecke. So entsteht das Archimedische Mosaik (k,3,k,3).
Werden die k-Ecke so gestaucht, daß die Dreiecke zu Sechsecken werden, dann erhalten wir wiederum ein Archmidisches Mosaik, und zwar (k,6,6).
Nun zerlegen und verschieben wir die Sechsecke in die Form der folgenden Skizze. Dieses Ergebnis erhalten auch aus $\{k, 3\}$ in dem wir k-Ecke durch k-Ecke, Kanten durch Rhomben und Ecken durch Blöcke von sieben Dreiecke in dieser Form ersetzen:
(Die ursprünglichen Sechsecke sind strichliert eingezeichnet.)
Diese Konfiguration hat zwei Ecktypen, einen mit großem Rhombuswinkel und vier Dreiecken und einen, der aus einem k-Eck, einem Dreieck, dem kleinen Rhombuswinkel und zwei Dreiecken besteht.

Alle voranstehenden Lagerungen weisen einen hohen Grad an Symmetrie auf. Deshalb liegt es auf der Hand, Konstruktionsprinzipien zu suchen, die auf solche Symmetrien Bezug nehmen.
Als typische Beispiele dazu seien die Molnár'sche Axialsymmetriemethode [66] sowie der Begriff des Kreiskranzes erwähnt, den Strohmajer [80] eingeführt hat: Ein Kreiskranz besteht aus 2k zyklisch angeordneten Kreisen, bei denen ein jeder zwei Nachbarkreise berührt, und deren Mittelpunkt abwechselnd auf dem einen und dem anderen von zwei parallelen Kugelkreisen liegen. Auf jedem dieser Kugelkreise bestimmen die Mittelpunkte der zum Kranz gehörigen Kreise ein reguläres n-Eck.

Tarnai [85], [86], [92] erweiterte die obige Konstruktionsmethode, um Packungen oktaedrischer oder ikoadedrischer Symmetrie zu erhalten. Seine Überlegung ist folgende :
Ein polyedrisches Netz mit ikosaedrischer Symmetrie kann aus einem ebenen Dreiecksnetz gefaltet werden. Diese Faltung kann z.B. so geschehen, daß man sich das (ebene) reguläres Mosaik $\{3, 6\}$ vorgibt, das die Ebene sowohl unter- und auch überdeckt. Dann gehe man von einer Ecke A aus entlang einer Kante in eine Richtung, bis b Ecken passiert wurden, wende um 60° und folge der neuen Kante c Ecken lang bis zu einem Zielpunkt B.
Der Anfangspunkt A und der Endpunkt B bestimmen ein gerades Linienelement, das als Kante eines "großen" gleichseitigen Dreieckes angesehen werden kann. Durch dieses große Dreieck wird wiederum ein reguläres, ebenes

Mosaik 3,6 definiert, in dem jeder auftretende Eckpunkt zugleich eine Ecke des ursprünglichen Mosaikes ist. Das Eckennetz des Ikosaeders ist durch das Eckennetz des "großen" Dreieckes gegeben. Aufgrund der Rotationssymmetrie des durch das ursprüngliche Mosaik erweiterten "großen" Mosaikes, wird ein "kleines" Mosaik auf der Ikosaederoberfläche erhalten.
Diese Konstruktion wird (wie bei Coxeter [21]) mit $\{3,5+\}_{b,c}$ bezeichnet. Die Schreibweise impliziert, daß in dem Dreiecksmosaik fünf oder mehr (dh. sechs) Dreiecke in einem Eckpunkt zusammentreffen. In ähnlicher Weise erhält man ein reguläres Oktaedermosaik $\{3,4+\}_{b,c}$ und ein Tetraedermosaik $\{3,3+\}_{b,c}$.
Nun müssen wir nur noch unsere Mosaike p,q+ [p=3, q=3,4,5, $b,c \in \mathbb{N}_0$, $(b,c) \neq (0,0)$] auf die Kugeloberfläche "aufblasen", und verlieren dadurch normalerweise die Gleicheit der Kantenlängen.
Die Art des "Aufblasens" ist jedoch nicht genau festgelegt, und so kann man einige Kanten auswählen, deren sphärisches Bild auf der Kugel gleiche Länge haben soll. Geschieht die Auswahl sorgfältig, so kann das sphärische Gebilde als Graph des Unterdeckungsproblemes angesehen werden [86].
Auch bei Robinson entstanden derartige Mosaike: $\{3,q+\}_{2,1}$ für n = 12, 24, 60 sowie $\{3,q+\}_{3,1}$ für n = 24,48,120. [q variiert zwischen 3,4 und 5.].
Tarnai konstruierte [85] auf diese Weise eine Unterdeckung für n = 180 [$\{3,5+\}_{3.2}$]; auch konnte er bestehende Lagerungen verbessern [86], [92].
Die Eckenanzahl V eines Mosaikes $\{p,q+\}_{b,c}$ kann man laut Coxeter [21] ausdrücken durch : $V = T \cdot [\frac{2q}{6-q}] + 2$.
Die Eckenanzahl des Mosaikes, das dadurch entsteht, daß man aus der Konstruktion $\{p,q+\}_{b,c}$ die Ecken des Basispolyeders $\{p,q\}$ entfernt, ist:

$$V^* = (T-1) \cdot [\frac{2q}{6-q}]$$

Dabei nennt man $T = b^2 + bc + c^2$ die "Triangulierungsnummer".
Setzt man in diese Formeln spezielle Werte für b und c ein, so sieht man, daß diese Methode Konstruktionen für viele geradzahlige n liefert. [von 2-100 fehlen nur 46, 62, 68, 82, 90]
E. Székely hat in Zusammenarbeit mit A. Karabinta die " Spiralmethode " entwickelt [44], [82]. Ihre Vorgangsweise ist die:
Es sei $d = 2r_n$ der Durchmesser eines Kreises des gesuchten Lagerung und $O_1, .., O_k$ (k = 3,4,5,6,7) seien die Ecken eins regulären sphärischen k-Eckes. Um diese Eckpunkte schlagen wir Kreise mit Radius r_n.
Diese Kreise bilden die erste Kreisschicht, dh. jeder dieser Kreise steht am Beginn eines Spiralarmes. Ist die l-te Kreisschicht bereits vorhanden, so konstruieren wir die (l+1)-te Schicht folgendermaßen:
Wir nehmen einen Spiralarm mit zugehörigem [l-ten] Kreis. Auf diesen Arm zeichnen wir, falls es möglich ist, einen Kreis mit Radius r_n, der den l-ten Kreis und wenigstens einen Kreis eines benachbarten Spiralarmes berührt, der aber mit keinem bereits konstruierten Kreis innere Punkte gemeinsam

haben darf. Eine genaue Untersuchung und Klassifikation der möglichen Spiraltypen findet sich in [82].
Folgendes Bild zeigt eine derartige Lagerung von 35 Punkten: Eine [etwas theoretische] Methode ist in [4] erwähnt. Sie besteht darin, einen Graphen aus verschiedenen (”starren”, *s.* I.6) Teilgraphen, die alle aus höchstens einem Viereck und ansonsten nur aus Dreiecken bestehen, zusammenzukleben. Die einzelnen Winkel der Teilgraphen werden dabei mit + und - versehen, je nachdem ob sie größer oder kleiner als der euklidische Grenzwinkel [= 60°] sind.

1.6 Physikalische Methoden, Überdeckungsproblem

Versucht man zu einer beliebigen Zahl n die optimale Lagerung zu bestimmen, so entdeckt man bald, daß die bisher aufgezeigten Methoden nicht ausreichen.
Liegt ein irreduzibler Graphen vor, so bedeutet das keineswegs, daß man bereits die optimale Lagerung gefunden hat. Wie schwierig sich die Suche nach dem optimalen Graphen für 9 Punkte gestaltet, kann man [76] entnehmen. Daher sucht man generelle Verfahren, die feststellen, ob ein vorliegender irreduzibler Graph optimal sein könnte. Üblicherweise nimmt man dafür Anleihen aus der Physik. Ein solches - allerdings umständliches - Verfahren fanden Danzer [24], sowie Tarnai und Gáspár [88], [89].
Wichtig ist in diesem Verfahren der physikalischen Begriff der ”Starrheit” einer Lagerung, deren Graphen man sich als ein festes ”SStabwerk” vorstellt. Dabei sind die Kanten des Graphen als Stäbe und die Ecken des Graphen als verbindende Gelenke, die keinerlei Reibung besitzen, aufzufassen. [Die exakten Definitionen entnehme man der Literatur].
Es bezeiche s_{j,k_ν} eine Kraft, die auf den Stab wirkt, der zwischen den Punkten P_j und P_{k_ν} liegt. Ist s ¿ 0, so ist der Stab zug-, ansonsten ist er druckbeansprucht. Es sei e_{i,k_ν} Einheitsvektor des Stabes, der P_i mit P_{k_ν} verbindet, und p_j sei eine im Knotenpunkt j angreifende Kraft [81], [88].
Das System befindet sich im Gleichgewicht [81,88], wenn gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} s_{j,k_\nu} \cdot e_{j,k_\nu} + p_j = 0 \tag{1.22}$$

Wenn wir die Gleichgewichtsmatrix G einführen und die auftretenden Kräfte als Vektoren anschreiben, so ist dies gleich:

$$G^t \cdot s + p = o. \tag{1.23}$$

Die Gleichgewichtsmatrix G besteht aus k Spalten und 2n-3 Zeilen. [Im Graphen wäre k die Anzahl der Kanten [=Stäbe] und n die Anzahl der Punkte.] Sie läßt sich in einfacher Weise aus den Knotenkoordinaten berechen:

Sind die Punkte P_i und P_j miteinander verbunden, so schreiben wir an der Stelle (i,j) eine 1, ansonsten eine 0. In einer Spalte können daher nur zwei Einsen stehen.
Jede (auch nur unendlich kleine) Veränderung des Stabwerkes läßt sich ebenfalls mit einer Matrixgleichung anschreiben. Genaueres findet sich im Buch von Szabó [81].
Tarnai und Gáspár [88, 89, 93] erhalten aus Falluntersuchungen über den Rang der Matrix G, daß eine Lagerung nicht mehr verbesserbar ist, wenn eine der folgenden Relationen eintritt:

$$k = rg\,G \leq 2n - 3\,;\; k > rg\,G\,;\; rg\,G < 2n - 3 \tag{1.24}$$

Die physikalische Grundidee läßt sich so umsetzen:
Man stelle sich den Graphen wie oben als Stabwerk vor und erhitze ihn. Dann dehnen sich die Stäbe aus. Treten dabei keine inneren Kräfte auf, so ist es möglich, das System durch Hinzufügen neuer Stäbe starr zu machen. So entsteht ein neues Stabwerk, auf das dieselbe Prozedur immer wieder und immer wieder angewandt wird, und zwar solange, bis keine weiteren derartigen Veränderungen mehr möglich sind.
Bei der Betrachtung der gefundenen Graphen bemerkt man, daß die optimalen Lagerungen - entgegen den bisherigen Fällen - höchst unsymmetrisch sind. Zur Illustration dazu möge die Verbesserung der Szekely'schen Konstruktion (S.27) dienen [88]:
Weitere (physikalische) Methoden [17], [47], [59], [62] bestehen darin, die abstoßende (repulsive) Kraft, die zwischen zwei Punkten P_i und P_j mit Abstand d_{ij} wirkt, zu minimieren. Die abstoßende Kraft wird dabei üblicherweise mit δ_{ij}^{1-p} angesetzt [17]. Wandert p nach ∞, so nähern sich die [p-]Lagerungen der optimalen Lagerung des Unterdeckungsproblemes [60].
Minimiert wird üblicherweise die Gesamtenergie, das ist die Summe über alle Interaktionen, die [47] die Darstellung hat:

$$\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} (\frac{c}{\delta_{ij}})^{-p}. \tag{1.25}$$

Lokale Minima von $\mathcal{E}$ findet man durch Lösung des nichtlinearen Gleichungssystemes $\partial\mathcal{E}/\partial\alpha_k = 0$ [k =1..2n]. Dabei seien die α_k die Polarkoordinaten eines Sphärenpunktes.
Damit die Lösung des Gleichungssystemes tatsächlich ein Minimum ist, darf die Hesse'sche Matrix $\partial^2\mathcal{E}/\partial\alpha_l\partial\alpha_m$ keine negativen Eigenwerte besitzen.
Bei der [bislang besten] Ausführung dieser Methode wählte Kottwitz [47] eine zufällig ausgewählte Startverteilung, und minimierte iterativ mit verschiedenen Methoden (Gradientenmethode, Newton-Raphson), bis er ein Minimum erreichte. So erhielt er fast optimale Lagerungen für $13 \leq n \leq 90$. In der folgenden Abbildung ist das Verhalten der Dichte d_n dargestellt:

Zuletzt sollen noch einige Ergebnisse, die das Überdeckungsproblem betreffen, erwähnt werden:
In [26] untersucht G.Fejes-Tóth dieses Problem mit einer Methode, die der Robinson'schen [70] ähnlich ist, und löst damit die Aufgabenstellung für $n = 10$ und $n = 14$; auch gibt er gute Konstellationen für n = 9, 16 und 32 an.
Er stellt sich dabei die Frage, welche Polygonarten in einem Mosaik, das durch die Mittelpunkte einer Überdeckung definiert wird, vorkommen können und beweist, daß bei n = 10 nur vier- und fünfkantige Ecken vorhanden sein können, bei n = 14 nur fünf- und sechskantige.
Klarerweise kann man auch dem Überdeckungsproblem einen Graphen zuordnen. Allerdings wird die Konstruktion etwas aufwendiger, denn es reicht nicht, nur die Mittelpunkte zu betrachten, man muß auch die Punkte in Betracht ziehen, die nur durch Kreisränder bedeckt werden. Also besitzt der Graph einer Überdeckung zwei verschiedene Ecktypen, eine gerade Anzahl von Ecken und Kanten der Länge R_n, die sich nie überschneiden.
Auch das Tarnai'sche Temperaturprinzip funktioniert; nur muß nun der Graph (das Stabwerk) abgekühlt werden. Dadurch zieht es sich zusammen. Durch Entfernung der unter Druck geratenen Stäbe und durch wiederholte Anwendung gelangt man dann zu einem lokalen Minimum, wie Tarnai und Gáspár [90], [91], [93] bewiesen. So wurde die bisher vollständigste Liste [93] generiert.

Kapitel 2

Diskrepanzen auf der Kugel

2.1 Diskrepanzen

Im zweiten Kapitel wollen wir Funktionale untersuchen, die die "Gleichmäßigkeit" einer Verteilung von Punkten auf der Kugel "messen". Diese Funktionale wollen wir *Gleichmäßigkeitsmaße* nennen, obwohl sie normalerweise kein Maß im Sinne der Maßtheorie liefern.

Ein zentraler Begriff wird der Begriff der *Diskrepanz* sein, der nun definiert werden sollen [48]:
(0) *Maß* ist in dieser Arbeit stets ein Maß im Sinne der Maßtheorie [im Gegensatz zu "Gleichmäßigkeitsmaß "]
(1) Es sei $x_{\mathbf{n}} = (x)_{n=1}^{\infty}$ eine unendliche Folge von Punkten einer kompakten Menge X. Weiters sei μ ein Maß auf X. Die Folge (x_n) heißt *μ-gleichverteilt* auf X, wenn für alle stetigen Funktionen $f] : X \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1}^{N} f(x_n) = \int_X f \; d\mu. \tag{2.1}$$

(2) Ist auf einer kompakten Menge X mit Maß μ eine Folge $x = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ und ein Funktional $D_N = D_N(x)$ gegeben, so nennen wir D_N eine *Diskrepanz*, wenn gilt:

$$x \;\texttt{ist}\; \mu - \texttt{gleichverteilt} \Leftrightarrow \quad \lim_{N\to\infty} D_N(x) = 0. \tag{2.2}$$

Diese Definition ist zwar nicht allgemein üblich, aber für unsere Zwecke vollkommend ausreichend. Nun ein paar Beispiele:

Es sei X = [0,1]. $1_B(x)$ sei die Indikatorfunktion des Bereiches B, λ sei das Lebesguemaß auf $\mathbb{R}$ und $x = (x_n)$ sei eine Folge reeller Zahlen. Unter einer *Diskrepanz bis zum N-ten Glied* versteht man dann üblicherweise [48] das Funktional

$$D_N(x) := \sup_{I\subset[0,1]} |\frac{1}{N} \cdot \sum_{k=1} 1_I(x_n) - \int_I 1_I \, dx| =$$

$$\sup_{I\subset[0,1]} |\frac{1}{N} \cdot \#\{x_i \in I : 1 \leq i \leq N\} - \lambda(I)| =$$

$$= \frac{1}{N} \cdot \sup_{I\subset[0,1]} |\#\{x_i \in I : 1 \leq i \leq N\} - N \cdot \lambda(I)|.$$

Dazu analog kann man in jedem kompakten Raum X mit Maß μ eine Diskrepanz D_N definieren durch:

$$D_N = \frac{1}{N} \cdot \sup_{I\subset[0,1]} |\#\{x_i \in I : 1 \leq i \leq N\} - N \cdot \mu(I)| \tag{2.3}$$

Eine Diskrepanz dieser Art werden wir im folgenden Paragraphen betrachten.
Dies ist jedoch nicht die einzig mögliche Definition einer Diskrepanz auf [0,1]. Ebenfalls von Bedeutung ist die Sterndiskrepanz

$$D_N^*(x) := \sup_{0\leq X\leq 1} |\frac{1}{N} \cdot \#\{x_i \in [0,x] : 1 \leq i \leq N\} - x|.$$

Sie ist mit der Diskrepanz D_N durch folgende Ungleichung verbunden:

$$D_n^*(x) \leq D_n(x) \leq 2 \cdot D_n^*(x) \tag{2.4}$$

Mit Hilfe der Sterndiskrepanz kann man den Fehler einer eindimensionalen numerischen Integration abgeschätzen (Ungleichung von Koksma) [48]:
Ist f eine Funktion beschränkter Variation V(f) auf [0,1], und sind $x_1, .., x_n \in [0,1]$, *so gilt:*

$$|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_k) - \int_0^1 f(t)dt| \leq V(f) \cdot D_n^*. \tag{2.5}$$

Als ein weiteres Beispiel definieren wir uns auf jedem separablen, zusammenhängenden, metrischen Raum (Ω, δ) mit $\#\Omega > 1$ eine Diskrepanz mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitstheorie [56]:
Für jede Teilmenge $A \subset \Omega$ und für jedes $\epsilon > 0$ sei die Menge $A^\epsilon := \{P \in \Omega : \delta(P, A) < \epsilon\}$ der ϵ-Bereich um A und $A^{-\epsilon} := \Omega \backslash (\Omega \backslash A)^\epsilon$.
Bezeichnet $\mathcal{B}$ die σ-Algebra der Borelmengen über Ω und sind P und Q zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf dem Meßraum $(\Omega, \mathcal{B})$, so wird mit $d_{LV} := \inf\{\epsilon > 0 : P(A) \leq Q(A^\epsilon) \forall A \in \mathcal{B}^\epsilon\}$ die *Lokalvariationsmetrik* zwischen P und Q definiert [56].
Es sei $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_n\}$ eine endliche Folge in Ω, es sei $\delta_P(x) := 1$ für x = P und 0 sonst und es sei:

$$P_{\mathcal{P}} := \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \delta_{P_i}.$$

$D_{LV} := d_{LV}(P_{\mathcal{P}}, P$ nennen wir dann LV-Diskrepanz von P [bzgl.$\mathcal{P}$].
Die Autoren in [56] zeigen, daß die Bedingung (1) erfüllt wird, wenn gilt: $\inf_{P\in\Omega} B(P, \epsilon) = 0 \Leftrightarrow \epsilon = 0$. Dabei ist $B(P, \epsilon)$ die ϵ-Kugel um den Punkt P

des Raumes Ω.
Das Gleichmäßigkeitsmaß D_{LV} läßt sich auch so formulieren: Ist $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_n\}$, und bezeichnet $\mathcal{T}$ die Menge aller nichtleeren Teilmengen von $\mathcal{P}$, so ist

$$D_{LV} = \inf\{\epsilon > 0 : Q_{\mathcal{P}}(B) \leq Q(B^{\epsilon})\ \forall B \in \mathcal{T}\}.$$

Setzen wir $\Omega = S^{d-1}$, so können wir die die Gleichung $D_{LV} = \rho$ so interpretieren: Ziehen wir um die Punkte $\{P_1, .., P_n\}$ Kugeln mit Radius ρ, so überdecken je k dieser Kugeln einen Teil der S^{d-1} mit Maß $\geq k/n$ und ρ ist die kleinstmögliche Zahl, die eine derartige Überdeckung erlaubt.
Die Diskrepanz D_{LV} hat auch einen Bezug zum Tammes'schen Problem. Denn D_{LV} ist das Infimum der $\epsilon > 0$ ist, für die gilt:
Sind von n Austrittöffnungen eines Pollenkornes nur mehr k $[1 \leq k \leq n]$ funktionstüchtig, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sich innerhalb einer ϵ-Umgebung von dem (zufälligen) Haftpunkt des Pollenkornes eine funktionsfähige Keimzelle befindet, größer gleich k/n, und das unabhängig davon, welche Austrittöffnungen ausgefallen sind.
Die bisher entdeckten Punktanordnungen, für die D_{LV} minimal ist, sind identisch mit den optimalen Anordnungen des Überdeckungsproblems [56]. Interessant wäre es, die Frage, ob diese beiden Fragestellungen immer dasselbe Resultat liefern, beantworten zu können.

2.2 Kugelkappendiskrepanz, Methode von Beck

Auf der S^{d-1} sei eine n-elementige Punktmenge $\{P_1, .., P_n\}$ gegeben. $C = C(\mathbf{v}, t) := \{\mathbf{y} \in S^{d-1} : \mathbf{v} \cdot \mathbf{y} \leq t\}$ sei eine Kugelkappe.
In dieser Definition bezeichnet $\mathbf{v}$ allerdings nicht den Scheitelpunkt der Kappe, sondern dessen Antipode; und auch der Normalabstand t der Kappe vom Mittelpunkt der Kugel wird in der von der Kappe wegweisenden Richtung gemessen. Daher ist für eine Kappe im üblichen Sinn der Wert von t stets negativ.
Wir können nun auf der Sphäre in natürlicher Weise folgende Maße einführen:
(i) das Zählmaß $Z_0(C) := \#\{P_i : P_i \in C\} = \#\{P_1, .., P_n\} \cap C$ und
(ii) das "Oberflächenmaß" $\omega_0(C) := n \cdot \omega^*(C) := n \cdot \omega(C)/\omega(S^{d-1})$
Mit ω^* wollen wir im weiteren stets das normierte Oberflächenmaß ω/ω_{d-1} bezeichnen.
Durch diese beiden Maße erhalten wir, analog zu (1.2) eine Diskrepanz $B_N(C) := Z_0(C) - \omega_0(C) = \#\{P_i : P_i \in C\} - n \cdot \omega^*(C)$, die "*Kugelkappendiskrepanz*" heißt [3]. Für den Betrag dieser Diskrepanz wollen wir nun obere und untere Schranken berechen.
Dazu sei $1_r(\mathbf{x})$ die charakteristische Funktion einer Vollkugel mit Radius r und Mittelpunkt $\mathbf{x}$. Unter $f * g$ verstehen wir das Faltungsprodukt auf R^d, das so definiert ist:

$$(f * g)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot g(\mathbf{a})\, d\mathbf{a}.$$

Weiters brauchen wir im folgenden stets die Funktion F_r:

$$F_r(\mathbf{x}) := (1_r * (dZ_0 \; - d\sigma_0))(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} 1_r(\mathbf{x}-\mathbf{a}) \cdot (dZ_0(\mathbf{a}) - d\omega_0(\mathbf{a}))d\mathbf{a} =$$

$$= \#\{P_i : P_i \in B^d(\mathbf{x}, r)\} - n \cdot \omega^*(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}) =$$
$$= \#\{P_i : P_i \in (B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1})\} - n \cdot \omega^*(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}) =$$
$$= B^d(B_N(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}) \tag{2.6}$$

Um Aussagen über die Diskrepanz treffen zu können, geht man so vor, daß man das Integral $\int_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} |F_r(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} dr$ abschätzt und anschließend durch das zugehörige Maximum ersetzt.
$B^d(\mathbf{x}, r)$ schneidet aus der Sphäre S^{d-1} eine Kugelkappe $C(\mathbf{v}, t)$ heraus. Bezeichnen wir mit x den Betrag von $\mathbf{x}$, so sind die Kappenparameter: $\mathbf{v} = -\mathbf{x}/x$ und $t = (r^2 - 1 - x^2)/(2 \cdot x)$.
Diese Parameterwerte erhält man aus folgender Überlegung:
$\mathbf{v}$ ist der von $\mathbf{x}$ wegweisende Schnittpunkt der Sphäre mit der Geraden $\mathcal{G}$, die $\mathbf{x}$ mit dem Ursprung (das sei der Mittelpunkt der Sphäre) verbindet.
Für t benötigen wir folgende Überlegung: Es sei $\mathbf{y} \in B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}$ und l sei der Lotpunkt von $\mathbf{y}$ auf $\mathcal{G}$. Dann sind die Winkel $\angle(o, l, \mathbf{y})$ und $\angle(\mathbf{x}, l, \mathbf{y})$ rechte Winkel. Auf die beiden rechtwinkeligen Dreiecke $\Delta(o, l, \mathbf{y})$ und $\Delta(\mathbf{x}, l, \mathbf{y})$ wenden wir nun den Satz von Pythagoras an und beachten, daß gilt: $|o, l| = t$, $|o, \mathbf{y}| = 1$, $|\mathbf{x}, l| = x$ und $|\mathbf{x}, \mathbf{y}| = r$.
Wir erhalten das Ergebnis: $1 - t^2 = |\mathbf{y}, l|^2 = r^2 - (x + t)^2$, aus dem die Formel für t folgt.
Nun betrachten wir zwei Sonderfälle:
Für $1 + r < x$ liegt die Kugel $B^d(\mathbf{x}, r)$ vollständig im Komplement von S^{d-1}. Das heißt, daß der Schnitt leer ist und daß daher $F_r(\mathbf{x}) \equiv 0$ für $|\mathbf{x}| > r + 1$ ist.
Ist umgekehrt $r > x + 1$, so ist S^{d-1} vollständig in $B^d(\mathbf{x}, r)$ enthalten. Dann ist $B^d(\mathbf{x}, r) \in S^{d-1} = S^{d-1}$ und es gilt:

$$Z_0(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}) = Z_0(S^{d-1}) = \#\{P_i : P_i \in S^{d-1}\} = n$$

und

$$\omega_0(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1}) = n \cdot \omega^*(S^{d-1}) = n \cdot 1 = n.$$

Daher ist $F_r(\mathbf{x})$ auch für $|\mathbf{x}| < r - 1$ ident Null.
Die soeben durchgeführten Überlegungen wenden wir nun auf $B_N(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1})$ an und erhalten: $\int_1^d \int_{\mathbb{R}^d} |F_r(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} dr =$

$$= \int_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\#\{P_i \in (B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1})\} - n \cdot \omega^*(B^d(\mathbf{x}, r) \cap S^{d-1})|^2 d\mathbf{x} dr =$$

$$\int_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}(\mathbf{x}, r), t(\mathbf{x}, r))\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}(\mathbf{x}, r), t(\mathbf{x}, r))|^2 d\mathbf{x} dr =$$

$$\int_1^2 \int_{r-1}^{r+1} \int_{\mathbb{R}^d} = |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}(\mathbf{x},r), t(\mathbf{x},r))\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}(\mathbf{x},r), t(\mathbf{x},r))|^2 d\frac{\mathbf{x}}{x} dx\, dr$$

Da $\mathbf{v}$ nur von $\mathbf{x}$ abhängt und sich auf ganz S^{d-1} bewegt, ist $d(\mathbf{x}/x) = d\omega(\mathbf{v})/\omega_d$. Weiters ist t nur abhängig von $x = |\mathbf{x}|$ und r.
Daher ist das bisherige Integral gleich:

$$\int_1^2 \int_{r-1}^{r+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t(x,r))\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t(x,r))|^2 d\omega(\mathbf{v})\, dx\, dr.$$

Betrachtet man $t = t(x,r)$ nur als Funktion von x $[= t_r(x)]$, so kann man folgende Transformation durchführen :

$$\int_1^2 \int_{r-1}^{r+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t(x,r))\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t(x,r))|^2 d\omega(\mathbf{v})\, dx\, dr =$$

$$\int_1^2 \int_{r-1}^{r+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t_r(x))\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t_r(x))|^2 \frac{t_r'(x)}{t_r'(x)} d\omega(\mathbf{v})\, dx\, dr =$$

$$\int_1^2 \max |\frac{1}{t_r'(x)}| \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t_r)\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t_r)|^2 d\omega(\mathbf{v})\, dt_r\, dr,$$

da wegen $2x \cdot t = r^2 - 1 - x^2$ gilt: $x = r \pm 1 \Leftrightarrow t = \mp 1$.

Dieses Integral ist (wegen $\int_a^b f \leq (b-a) \cdot \max |f|$) kleiner gleich:

$$(2-1) \cdot \max_{\substack{1<r<2 \\ r-1<x<r+1}} |\frac{1}{t_r'(x)}| \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t)\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t)|^2 d\omega(\mathbf{v})\, dt =$$

$$|\frac{1}{\inf_{\substack{1<r<2 \\ r-1<x<r+1}} (\partial t / \partial x)}| \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t)\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t)|^2 d\omega(\mathbf{v})\, dt \leq$$

$$Konst \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \Big(\int_{S^{d-1}} (\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t)\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t)) d\omega(\mathbf{v}) \Big) dt,$$

da das angegebene Infimum stets $\geq Konst > 0$ ist [3].
Wir führen nun für zwei Funktionen f und g das Symbol $\ll$ ein:

$$f \ll g \Leftrightarrow EKonstantec > 0 mit |f| \leq c \cdot g \tag{2.7}$$

Damit können wir die bisherigen Rechnungen zusammenfassen in:

$$\int_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} |F_r(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\, dr \ll \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \Big(\int_{S^{d-1}} B_N(C(\mathbf{v}, t)) d\omega(\mathbf{v}) \Big) dt,$$

Mit Hilfe von Fouriertransformierten kann man zeigen [2],[3], daß gilt:

$$\int_1^2 \int_{\mathbb{R}^d} |F_r(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}\, dr \gg n^{1-1/(d-1)}$$

Daher können wir die Diskrepanz abschätzen durch:

$$n^{1-1/(d-1)} \ll \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \Big(\int_{S^{d-1}} B_N(C(\mathbf{v}, t)) d\omega(\mathbf{v}) \Big) dt,$$

Da man ein Mittel nach oben stets durch das zugehörige Maximum abschätzen kann, folgt der Satz:
Es gibt zu jeder Menge $\{P_1, .., P_n\}$ von n Punkten auf der Kugel eine sphärische Kappe $C(\mathbf{v}, t)$, für die gilt: $|B_N(C(\mathbf{v}, t))| =$

$$|\#\{P_i \in C(\mathbf{v}, t)\} - n \cdot \omega^*(C(\mathbf{v}, t)| > c(d) \cdot n^{1/2-1/(2d-1)} \tag{2.8}$$

[Tatsächlich ist ω^* nur abhängig von t, da nur dieser Parameter Einfluß auf die Oberfläche der Kappe hat. Beck notiert deswegen anstelle von $\omega^*(C(\mathbf{v}, t))$ stets $\omega^*(t)$.]
Um $|B_N|$ in die andere Richtung abschätzen zu können, führte Beck in [3] eine wichtige wahrscheinlichkeitstheoretische Methode ein, die nun erläutert werden soll.
Dazu führen wir Polarkoordinaten ein, zum Beispiel so: Bezeichnet $(x_1, ..., x_d)$ einen Punkt der S^{d-1}, so setzen wir:

$$x_1 = \cos\theta_1, x_2 = \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2, ..., x_d = \sin\theta_1 \cdot ... \cdot \sin\theta_{d-1},$$

Dabei bewegen sich Polarkoordinaten zwischen :

$$0 \leq \theta_\mu \leq \pi \text{ für } \mu = 1, .., d-2 \text{ und } 0 \leq \theta_{d-1} \leq 2\pi$$

Als nächstes zerlegen wir die S^{d-1} in n Koordinatenkästchen der Form $Q_l = \{(\theta_1, .., \theta_{d-1})\}$. Man kann [3] die Kästchen so wählen, daß gilt:

$$S^{d-1} = Q_1 \cup ... \cup Q_n$$

$$\omega(Q_l) = \omega(S^{d-1})/n = \omega_d/n$$

$$diam Q_l = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in Q_l} |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \ll n^{-1/(d-1)} \tag{2.9}$$

[Unter diam Q ist der Durchmesser von Q zu verstehen.]
Aus jedem Bereich Q_l wählen wir gleichmäßig und unabhängig voneinander einen Zufallspunkt p_l aus. Das bedeutet, daß die unabhängige Auswahl so erfolgt, daß für jede meßbare Menge $H \subseteq S^{d-1}$ gilt:

$$W(p_l \in H = \omega(H\ Q_l)/\omega(Q_l).$$

Auf diese Weise erhalten wir eine Menge $\mathcal{P}$ von n Punkten auf der Kugel, deren Diskrepanz B_N wir nun berechnen.
[$\overline{C} = C(\mathbf{v}, t)$ sei eine beliebige aber feste Kappe und unter $C = \bigcup\{Q_l : Q_l \subset C\}$ verstehen wir die Vereinigung aller Kästchen, die in C liegen. $\overline{C}$

enthält genau so viele Zufallspunkte, wie der Erwartungswert angibt. D.h. es ist $B_N(\overline{C}) = \#\{p_l : p_l \in \overline{C}\} - n \cdot \omega^*(\overline{C})/\omega_{d-1} = 0$.

Weiters sei $\mathcal{L}(C)$ die Menge der Indizes jener Bereiche Q_l die am Rand von C zu liegen kommen, dh. jener Kästchen, die sowohl mit C als auch mit $S^{d-1}\backslash C$ innere Punkte gemeinsam haben. Klarerweise liegen in C
$\overline{C}$ genau $\#\mathcal{L}(C)$ Kästchen und es ist:

$$C\backslash\overline{C} = \bigcup\{Q_l : l \in \mathcal{L}(C)\}.$$

Da der Durchmesser eines jeden Kästchens $\ll n^{-1/(d-1)}$ ist, können auf einem "Breitenkreis" höchstens "Kreisumfang"/ "Kästchendurchmesser" Kästchen liegen. Aus dieser Überlegung folgt, daß $\#\mathcal{L}(C) \ll n^{1-1/(d-1)}$ sein muß [3].
Für die Randmenge $C\backslash\overline{C}$ definieren wir eine Zufallsvariable ξ_l:

$$\xi_l = 1 \text{ für } p_l \in C \cap Q_l \text{ und } \xi_l = 0 \text{ sonst.}$$

Mit dieser Zufallsvariablen können wir die folgenden Umformungen vornehmen. Dabei beachten wir, daß gilt:

$$B_N(\overline{C}) = 0$$

$$\#\{p_l : p_l \in C\} = \sum_C 1$$

$$l \in \mathcal{L}(C) \Leftrightarrow p_l \in C\backslash\overline{C}.$$

Es gilt also:

$$B_N(C) = \#\{p_l : p_l \in C\} - n \cdot \omega^*(C) =$$

$$= \#\{p_l : p_l \in \overline{C}\} - n \cdot \omega(\overline{C})/\omega_{d-1} + \#\{p_l : p_l \in C\backslash\overline{C}\} - n \cdot \omega(C\backslash\overline{C})/\omega_{d-1} =$$

$$= \#\{p_l : p_l \in C\backslash\overline{C}\} - n \cdot \omega(C\backslash\overline{C})/\omega_{d-1} =$$

$$= \#\{p_l : p_l \in C\backslash(\overline{C} \cap Q_l)\} - n \cdot \omega(C\backslash(\overline{C} \cap Q_l))/\omega_{d-1} =$$

$$= \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} \xi_l - \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} (\xi_l \cdot \omega^*(C\backslash(\overline{C} \cap Q_l))/\omega_{d-1} = \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} (\xi_l - E(\xi_l)).$$

Zusammenfassend ergibt sich:

$$B_N(C) = \#\{p_l : p_l \in C\} - n \cdot \omega^*(C) = \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} (\xi_l - E(\xi_l)). \tag{2.10}$$

Mit der Abkürzung $\eta_l := \xi_l - E(\xi_l)$ schreibt sich diese Gleichung an als $B_N(C) = \sum_l \eta_l$, wobei über $\mathcal{L}(C)$ zu summieren ist.
Da die Auswahl der p_l unabhängig voneinander erfolgte, sind auch ξ_l und η_l unabhängige Zufallsvariablen. Daher gilt

$$E(\sum_l \eta_l)^2 = E((\sum_{l1} \eta_{l_1}) \cdot (\sum_{l2} \eta_{l_2})) = \sum_{l1} \sum_{l2} E(\eta_{l_1} \cdot \eta_{l_2}) =$$

$$= \sum_{l1} \sum_{l2} E(\eta_{l_1}) \cdot E(\eta_{l_2}) = \sum_{l} E(\eta_l))^2 = \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} E(\xi_l - E(\xi_l)).$$

Daraus erhält man:

$$E(\#\{p_l : p_l \in C\} - n \cdot \omega^*(C))^2 = E(\sum_{l \in \mathcal{L}(C)} (\xi_l - E(\xi_l))) \leq$$

$$\sum_{l \in \mathcal{L}(C)} E(\xi_l - E(\xi_l)) \leq \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} E(\xi_l^2) \leq \sum_{l \in \mathcal{L}(C)} 1 = \#\mathcal{L}(C) \ll n^{1-1/(d-1)}$$

Damit ist:

$$E\Big(\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\omega_d} \cdot \Big(\int_{S^{d-1}} B_N(C(\mathbf{v},t)) d\omega(\mathbf{v})\Big) dt\Big) \ll n^{1-1/(d-1)} \tag{2.11}$$

Da der Erwartungswert als ein gewichtetes Mittel aufgefaßt werden kann, daher folgt aus (8) unmittelbar die Existenz einer Kappe C, die diese Abschätzung erfüllt.

Auf $E(\sum_l \eta_l)^2$ können wir aber auch folgendes Lemma [eine Bernstein-Chernoff-Ungleichung] anwenden [3]:

Es seien $X_1, ..., X_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit Betrag ≤ 1 und es sei $\beta = \sum_{i=1}^{m} E(X_i - E(X_i))^2$. Dann ist:

$$W\Big(|\sum_{i=1}^{m} E(X_i - E(X_i))| \geq \gamma\Big) \leq \begin{cases} 2 \cdot \epsilon^{-\gamma/4} & f\ddot{u}r\ \gamma\ \geq \beta \\ 2 \cdot \epsilon^{-\gamma/(4\beta)} & f\ddot{u}r\ \gamma\ \leq \beta \end{cases} \tag{2.12}$$

Daraus erhält man den folgenden Satz ([3], Theorem 24D) (vgl. mit (5)):

Für jede Menge $\{P_1, ..., P_n\}$ von n Punkten auf der S^{d-1} gibt es eine sphärische Kappe C und eine Konstante $C > 0$ sodaß gilt:

$$|B_N(C)| = |\#\{P_i \in C\} - n \cdot \omega^*(C)| < C \cdot n^{1/2-1/(2d-2)} \cdot (\log n)^{1/2} \tag{2.13}$$

Mit der Kugelkappendiskrepanz verwandt ist die *Spaltendiskrepanz*. Sie verwendet an der Stelle von Kugelkappen Spalten (slices), das sind Schnitte zweier Großkreisbögen, also Kugelzweiecke. Der Autor in [7] beweist, daß diese Diskrepanz durch die Kugelkappendiskrepanz abgeschätzt werden kann, und daß daher dieselben Abschätzungen wie bei dieser gelten.

2.3 Rotationen und Operatordiskrepanz

Betrachtet man die Definition der Diskrepanzen und die der Gleichverteilung genauer, so erkennt man, daß das Grundproblem das ist, die Größe $\mathcal{F} :=\| \frac{1}{n} \cdot \sum_{n=1} f(\mathbf{x}_i) - \int_X f(\mathbf{x}) d\mu \|$ bei festem Maß μ im Kompaktum X für eine geeignete Klasse Φ von Funktionen f und für eine geeignete Norm möglichst klein zu machen. Klarerweise ist unser Kompaktum stets die S^{d-1}

mit dem Oberflächenmaß ω, bzw. mit dem normierten Oberflächenmaß ω^* Verwendet man die Maximumsnorm und die Klasse der Indikatorfunktionen der sphärischen Kugelkappen auf S^{d-1}, so erhält man die Kugelkappendiskrepanz aus Paragraph 2.
In diesem Paragraphen wird die *Operatordiskrepanz* betrachtet, die entsteht, wenn der Fehler $\mathcal{F}$ in der L^2-Norm für die Funktionen der Klasse $\Phi = \{t \in L^2(S^{d-1}) : \quad \| f \|_2 = 1\}$ möglichst gering werden soll.
Die hier vorgestellte Methode, die auch bei anderen Diskrepanzen verwendet werden kann, ist konstruktiv, liefert aber schwächere Ergebnisse als die Methoden von Beck. Wir wollen uns daher mit einer Skizze begnügen; die genaue Beschreibung findet man in [57] und [58].
Die Methode sucht nicht nach Punkten auf der Kugel, sondern nach Rotationen der Kugel. Klarerweise wird dann durch die Drehachsen eine Menge von Punkten auf der Kugel erzeugt.

Es sei G stets die $SO(3)$, das ist die Gruppe aller Rotationen im 3-dimensionalen Raum. Wir entnehmen G eine symmetrische und gleichverteilte Folge von Rotationen. Dabei wird "gleichverteilt" im üblichen Sinn gebraucht, und unter "symmetrisch" verstehen wir, daß die Folge mit jeder Rotation γ auch die inverse Rotation γ^{-1} enthält.
Ist eine derartige Folge $\{\gamma_1, ..., \gamma_{2n}\} = \{\gamma_1, .., \gamma_n, \gamma_1^{-1}, ..., \gamma_n^{-1}\}$ gegeben, so definieren wir uns für alle $f \in \Phi$ den Heckeoperator

$$Tf := \sum_{i=1}^{n} (f(\gamma_i \mathbf{x}) + f(\gamma_i^{-1} \mathbf{x})).$$

Es sei nun:

$$\delta f := \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} f(\gamma_i \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S^2} f(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x})$$

und für die Folge $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_n\}$ sei

$$O(\Gamma) = O(\gamma_1, ..., \gamma_n) = \sup_{\|f\|=1} \{\| \delta f \|_2\}.$$

Dann verstehen unter $O_{2n} := \inf_{\Gamma \in G} O(\Gamma)$ die *Operatordiskrepanz*, wobei wir das Infimum über alle möglichen Folgen Γ bilden.
Wie die Autoren in [57] aufzeigen, ist läßt der Hecke-Operator, der die Operatornorm $\| \; T \; \| \;\; = 2n$ hat, jeden Raum der sphärischen harmonischen Spektralanalyse invariant.
Der Raum H_n der sphärischen harmonischen Spektralanalyse der Ordnung n ist definiert als der Eigenraum des Laplace-Operators Δ zu dem Eigenwert $n \cdot (n+1)$ und hat die Dimension $2n+1$; der Laplace-Operator Δ (s.S.58) zerlegt den $L_2(S^2)$-Raum in die direkte Summe der H_n [57, 67].
Die Legendre-Polynome P_n werden erzeugt durch die Gleichung:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

Sie bilden eine wichtige Funktionenfamilie der Räume H_n und sind zueinander orthogonal.
Weiters gibt es eine Orthonormalbasis $\{b_{j,n}\}$ von H_n, die den Heckeoperator T diagonalisiert [57]. Ist $\rho_{j,n}$ der zum Basiselement $b_{j,n}$ zugehörigen Eigenwert, so gilt:

$$T(b_{j,n}) = \rho_{j,n} \cdot b_{j,n}.$$

Dann ist Spur von $T^s = sp \quad T^s = \sum \rho_{j,n}^s$ (mit Summe über $|j| < n$).
Bezeichnet W_s die Menge aller "Wörter der Länge s" in $\{\gamma_1, ..., \gamma_{2n}\}$, so kann T^s auch geschrieben werden als $T^s = \sum_{\gamma \in W_s} f(\gamma \mathbf{x})$.

Diese Summe ist gleich $\sum_{\gamma \in W_s} r_\gamma \cdot (\sin(2n+1) \cdot (r_\gamma/2))/(\sin(r_\gamma/2)$, wo r_γ den Drehwinkel der Rotation γ bezeichnet. Ist m_s die Anzahl aller Wörter der Länge s, die die Identität buchstabieren, so folgt, da $r_\gamma = 0 \Leftrightarrow r = Id$, [57] :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n+1} \cdot \sum \rho_{j,n}^s = m_s.$$

Diese Grenzwertbeziehung ermutigt, durch $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \, d\mu(t) = m_s$ für $s \geq 0$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß zu definieren.
Bezeichnet μ_n das Spektralmaß von $T_{|H_n}$, so wird durch die angegebene Grenzwertbeziehung die Konvergenz der Maße in der schwach-*-Topologie aufgezeigt; d.h.: für jede stetige Funktion f gilt: $\int f \, d\mu_n \to \int f \, d\mu$
Das *Spektralmaß* ist das Maß, das jedem Eigenwert eines Operators die Masse 1/(Dimension des Raumes) zuordnet; dabei werden die Eigenwerte gemäß ihrer Vielfachheit gezählt.
Daher gibt μ den Ort an, an dem der Großteil des Spektrums [=Großteil der "Masse"] von T zu finden ist. Speziell besteht der Träger von μ (:=*supp* $\mu := \{\mathbf{x} \in S^2 : \mu(\mathbf{x}) \neq 0\}$) aus Grenzwerten der Eigenwerte von T.
Weiters wird das Maß μ allein durch die natürliche Zahl m_s definiert und hängt daher nur von der durch $\{\gamma_1 ... \gamma_n\}$ erzeugten Gruppe Γ ab. Aus diesem Grund kann das Maß μ auch als Markovkette auf Γ interpretiert werden [57].
Damit die Markovkette translationsinvariant wird und das Spektralmaß μ besitzt, muß die Wahrscheinlichkeit, von $g \in \Gamma$ nach $\gamma_i g [\in \Gamma]$ zu kommen, überall gleich 1/2n sein [57].
m_s entpuppt sich in dieser Uminterpretation als die Anzahl der Wege der Länge s, die von einem Punkt g ausgehend zum selben Punkt g zurückführen.
Eine derartige Markovkette wurde von Kesten [46] untersucht. Er bewies, daß unter gewissen Bedingung das größte Trägerelement $\lambda = \max supp$ mu$=$ $\limsup_{n \to \infty} (m_s)^{1/s}$ von mu gleich 2n ist und sonst stets $\geq 2 \cdot \sqrt{2n-1}$ ausfällt.
Die gesuchte Diskrepanz O_{2n} ist gleich dem zweitgrößten Eigenwert von T/2n [57]. Aus dem Satz von Kesten folgt daher:

$$O_{2n} \geq \sqrt{2n-1}/n$$

In umgekehrter Richtung gilt: $O(\gamma_1, .., \gamma_{2n}) \ll (\log n)/(n^{1/2})$.

Ein Zusammenhang zwischen O_{2n} und T/2n wird bereits deutlich, wenn man die Norm $\| \delta f \|$ betrachtet:

$$\| \delta f \| = \| \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} f(\gamma_i \mathbf{x}) - \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S^2} f(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) \| =$$

$$= \| \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{2n} f(\gamma_i \mathbf{x}) \| - \| \frac{1}{4\pi} \cdot \int_{S^2} f(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) \| = \| \frac{1}{2n} \cdot T \| \quad minus \quad \texttt{Konst}.$$

Es wird in [58] auch gezeigt, daß man für jede Primzahl p mit $p \equiv 1(4)$ eine Menge $\Gamma = \{\gamma_1, ..., \gamma_{(p+1)/2}, \gamma_1^{-1}, .., \gamma_{(p+1)/2}^{-1}\}$ finden kann, für die $O(\Gamma) = 2 \cdot \sqrt{p}$ ist.
Die zitierten Artikel enthalten auch Computerprogramme, mit denen optimale Rotationsanordnungen berechnet werden können. Tabellarische und, für spezielle Werte, auch graphische Ausdrucke geben einen Überblick über die optimalen Anordnungen.
Für die sphärische Kappendiskrepanz und die Diskrepanz des L_2-Mittels gilt:
Es sei:

$$B_N(C) := \#\{\gamma_i \mathbf{x} \in C\}/n - |C|$$

$$D(\gamma_1 \mathbf{x}, ..., \gamma_n \mathbf{x}) := \sup |B_N(C)|$$

$$T(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) := (\int_C |B_N(C)|^2 d\omega(C))^{1/2}$$

Dann ist:

1. $D(\gamma_1 \mathbf{x}, ..., \gamma_n \mathbf{x}) \ll (\log n)^{2/3}/n^{1/3}$
2. $T(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ll n^{1/2} \cdot (\log n)$.

Die vergleichbaren Beck'schen Resultate lauten:

1. $D(\gamma_1 \mathbf{x}, .., \gamma_n \mathbf{x}) \ll (\log n)^{1/2}/n^{3/4}$
2. $T(\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n) \ll n^{1/2}$,

sind also durchwegs schärfer, aber nicht konstruktiv.

Ein merkwürdiger Satz über die Verteilung von Punkten auf der S^2, ist folgender [25]:
Es gibt zwei Konstante $c_1, c_2 > 0$, sodaß es
(i) für jede natürliche Zahl n und für jedes α mit $0 < \alpha < 2$ eine Anordnung von n Punkten auf S^2 gibt, in der jeder Punkt von mindestens $c_1 \cdot \log^* n$ anderen Distanz $> \alpha$ hat, und daß es
(ii) für jede natürliche Zahl n eine Anordnung von n Punkten auf S^2 gibt, in der jeder Punkt von mindestens $c_2 \cdot n^{1/3}$ anderen Punkten Abstand $\sqrt{2}$

hat.
[Haben zwei Punkte auf der S^{d-1} den Abstand $\sqrt{2}$, so stehen die zugehörigen Ortvektoren orthogonal aufeinander.]
Mit $\log^* n$ wird dabei die kleinste natürliche Zahl r bezeichnet, sodaß man, bei Start in n, die log-Funktion r-mal iterieren muß, um einen Wert ≤ 1 zu erhalten.
Bezeichnen wir mit f^k die k-te Iteration der Funktion f, so ist also $\log^* n = \min\{r \in \mathbb{N} : (\log n)^r \leq 1\}$. Diese Funktion ist Null für n = 1; für $2 \leq n \leq 15$ ist ihr Wert gleich 2; den Wert 3 nimmt sie an für $16 \leq n \leq 3814279$, usw.

Die Beweisidee für (i) ist folgende :
Wir fixieren uns ein $\epsilon > 0$, sodaß der Durchmesser eines Breitenkreises vom Abstand ϵ von der Äquatorebene stets größer α ist $[2 \cdot \sqrt{1-\epsilon^2} > \alpha]$. Die beiden Breitenkreise, die von der Äquatorebene den Abstand ϵ haben, begrenzen dann einen Parallelstreifen

$$S_\epsilon = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2 : |x_3| \leq \epsilon\}.$$

Für jedes $k \geq 1$ wird nun eine Punktmenge $\mathcal{P}$ konstruiert, in der jeder Punkt von zumindest k anderen Abstand α besitzt.
Es sei für ein natürliches k eine derartige Menge $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_{n(k)}\}$ gegeben, die sich zudem in einem kleinen S_ϵ-Streifen $[\epsilon(k) < \epsilon]$ um den Äquator befinde. (für k=1 bestehe $\mathcal{P}$ aus zwei Punkten mit Abstand α auf dem Äquator.) Es sei U ein Punkt in der Nähe des Nordpols, von dem er den (beliebig) kleinen Abstand δ habe.
Wir lassen die Punktmenge $\mathcal{P}$ um die Achse -UU rotieren. Die Kugel wird dabei so um die Achse -UU gedreht, daß der Punkt P_1 auf einen Punkt P_1', der von P_1 den Abstand $|P_1, P_1'| = \alpha$ besitzt, abgebildet wird. Diese Rotation bezeichen wir mit π_1. Analog dazu sei π_i die Drehung um -UU, die P_i auf P_i' überführt. Auch hier sei $|P_i, P_i'| = \alpha$. Es sei $\mathcal{P}^{(0)} = \mathcal{P}$,$\mathcal{P}^{(1)} = \pi_1(\mathcal{P}^{(0)})$. Sind die Mengen $\mathcal{P}^{(0)}$, $\mathcal{P}^{(1)}$,..., $\mathcal{P}^{(i-1)}$ bereits vorhanden, so wird $\mathcal{P}^{(i)}$ definiert durch $[1 < i \leq n(k)]$:

$$\mathcal{P}^{(i)} := \pi_i(\mathcal{P}^{(0)} \cup \mathcal{P}^{(1)} \cup ... \cup \mathcal{P}^{(i-1)}).$$

Die so erhaltenen Mengen werden zuletzt noch in $\mathcal{P}^*$ vereinigt:

$$\mathcal{P}^* := \mathcal{P}^{(0)} \cup \mathcal{P}^{(1)} \cup ... \cup \mathcal{P}^{(n(k))}.$$

Entscheidend für diese rekursive Konstruktion ist eine gute Wahl der Achse -UU. Mit einer geeigneten Wahl kann man nämlich erreichen, daß alle Drehungen ρ_i existieren, daß die Mengen $\mathcal{P}^{(0)}$, $\mathcal{P}^{(1)}$,..., $\mathcal{P}^{(n(k))}$ paarweise disjunkt sind, und daß sich die Menge $\mathcal{P}^*$ auf einem $\epsilon(k+1)$-Streifen mit $\epsilon(k+1) < \epsilon$ um den Äquator befinden.
Aufgrund unserer Rekursion ist $\#\mathcal{P}^{(i)} = 2 \cdot \#\mathcal{P}^{(i-1)} = 2^{i-1} \cdot \#\mathcal{P}^{(0)}$, da bei

Bildung von $\mathcal{P}^{(i)}$ jeder Punkt von $\mathcal{P}^{(i-1)}$ einen Bildpunkt $[1 < i \leq n(k)]$ erhält. Da alle Mengen paarweise disjunkt sind, enthält die Vereinigung von $\mathcal{P}^{(i-1)}$ und $\pi_i(\mathcal{P}^{(i-1)})$ genau $2 \cdot \#\mathcal{P}^{(i-1)}$ Punkte. Punkte. Setzen wir $n(k+1) := n(k) \cdot 2^{n(k)}$, so ist:

$$\#\mathcal{P}^* = \#\{\mathcal{P}^{(0)} \cup \mathcal{P}^{(1)} \cup ... \cup \mathcal{P}^{(n(k))}\} = \sum_{i=0}^{n(k)} \#\mathcal{P}^{(i)} =$$

$$\#\mathcal{P}^{(0)} + \sum_{i=0}^{n(k)} (2^{i-1} \cdot \#\mathcal{P}^{(0)}) = \#\mathcal{P}^{(0)} \cdot [1 + 2^{n(k)} - 1] = n(k+1),$$

also $\#\mathcal{P}^* = n(k+1)$. Es ist $x \cdot 2^x = e^{\ln x + x \cdot \ln 2} < e^x$ ist für $x > 5.7$. Daher können wir mit vollständiger Induktion zeigen, daß gilt:

$$\log^* n(k+1) = k+1 \Leftrightarrow n(k+1) < e^{(k+1)}$$

Denn : $n(1) = 2 < e$; $n(2) = 8 < e^e = \hat{e e}$ (Dabei sei e^k die k-fache Potenz von e: $\hat{e}\hat{e}...\hat{}e$)
Ist $n(k) < \hat{e}\hat{e}...\hat{}e$ (k mal), so ist:

$$n(k+1) = n(k) \cdot e^{n(k)} < n(k) \cdot \hat{e}\hat{e}...\hat{}e < \hat{e}\hat{e}...\hat{}\hat{e}e = e^{(k+1)}$$

In der Menge $\mathcal{P}^*$ hat jeder Punkt von mindesten (k+1) anderen genau den Abstand α, wie man durch Nachrechnen beweist.
Der Beweis der zweiten Aussage stützt sich auf einen analogen Satz der Ebene, dessen Konstruktion auf die Sphäre übertragen wird.

2.4 Sphärische Designs

Wie bereits bemerkt wurde (2.4), besteht ein Zusammenhang zwischen der Diskrepanztheorie und der numerischen Integration.
In der Numerik will man vor allem die Polynome, die ´ Grundbausteine´ der Funktionen, exakt zu berechnen. Daher sucht man üblicherweise nach Stützpunkten, bei denen der Fehler $\mathcal{F}$ genau dann Null wird, wenn P ein Polynom ist.
Eine Menge $\{P_1, .., P_n\} \subseteq S^{d-1}$ soll daher *d-dimensionales sphärisches t-Design* ($t \in \mathbb{N}$) heißen, wenn für jedes Polynom P mit Grad $< t$ gilt:

$$\frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} P(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(\mathbf{x}_i)$$

Die Existenz sphärischer Designs wurde erst 1984 in [77] nachgewiesen. In [23] und in [33] wird gezeigt, daß für ein festes t die Anzahl der Punkte, für die ein sphärisches Design existiert, eine untere Schranke von der Größenordnung t^{d-1} besitzt. Weiters sei erwähnt, daß die Ecken eines Fußballes

kein Design bilden [34].
Wir wollen jetzt ansatzweise die Existenz eines sphärischen t-Designs für $n \geq c_d \cdot t^{12 \cdot d}$ beweisen [98]. Weiters wollen wir zeigen, daß auch für rechteckige Bereiche der S^{d-1} Designs existieren (s.[99],Lemma 3). Diese Aussagen sind Korollare zu folgendem Satz der numerischen Integration [98],[99]:
Es sei $w(x) \geq 0$ eine auf [-1,+1] definierte und integrable Gewichtsfunktion für die mit $L_1 \geq 1 \geq L_2 \geq 0$ und $\beta \geq 0$ gilt:

$$\int_{-1}^{+1} w(x)dx = 1$$

$$L_2 \cdot (1 - |x|^\beta) \leq w(x) \leq L_1$$

$\phi := \{f_1, ..., f_s\}$ sei eine Klasse 3-mal stetig differentierbarer Funktionen auf [-1,+1], deren erste Ableitungen in Bezug zur Gewichtsfunktion w orthogonal sind. Das heißt:

$$\int_{-1}^{+1} f'_\mu(x) \cdot f'_\nu(x) \cdot w(x)dx = \begin{cases} 1 & f\ddot{u}r\ \mu = \nu \\ 0 & f\ddot{u}r\ \mu \neq \nu \end{cases} \tag{2.14}$$

Es sei für die Funktionen dieser Klasse:

$$K := \max_{\mu,\nu} \max_{[-1,+1]} (|f'_\mu|, |f'_\mu|, |(f'_\mu \cdot f'_\nu)'|, |(f'_\mu \cdot f'_\nu)''|)$$

sowie

$$C := \max_{-1 \leq x \leq +1} \max_{\mu=1...s} (|f'_\mu|, |f''_\mu|, |f'''_\mu|).$$

Dann gilt:
(a) Für $n \geq (24 \cdot s \cdot K^2 \cdot L_1/L_2)^{\beta+2}$ bzw. $n \geq n_0(s, C, L_1, L_2, \beta)$ gibt es Punkte $-1 < \xi_1 < ... < \xi_n < 1$, sodaß für alle $f \in \phi$ gilt:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) = \int_{-1}^{+1} f(x) \cdot w(x)dx$$

(b) Es werde x_j definiert durch die Gleichung:

$$\int_{-1}^{x_j} w(x)dx = j/n \tag{2.15}$$

Dann können wir annehmen, daß $x_{j-1} < \xi_j < x_j$ und daß gilt:

$$\min(\xi_j - x_{j-1}, x_j - \xi_j) > \frac{1}{3} \cdot (x_j - x_{j-1}). \tag{2.16}$$

Um die gewünschten Korollare zu erhalten, betrachten wir das Polynom $P = P(x_1, .., x_d) = x_1^{k1} \cdot ... \cdot x_d^{kd}$ mit $k_i \geq 0$ und $\sum_{i=0}^{d} k \leq t$.

Führen wir in der üblichen Weise Polarkoordinaten ein, und setzen wir $u_j := \cos\theta_j$, so gilt:

$$\int_{S^{d-1}} P(\mathbf{x})\,d\omega(\mathbf{x}) = \int_0^{2\pi} (\cos\varphi)^{k(d-1)} \cdot (\sin\varphi)^{kd} d\varphi \cdot \prod_{j=1}^{d-2} I_j = I_{d-1} \cdot \prod_{j=1}^{d-2} I_j$$

mit $I_j := \int_{-1}^{+1} (1-u_j^2)^{(kd+\ldots+k(j+1))} \cdot u_j^{kj} \cdot (1-u_j^2)^{(d-j-2)/2} du_j$.

Die Anwendung des Satzes auf die spezielle Klasse der Gegenbauerpolynome ergibt, daß es für jede Koordinate u_j eine Menge A_j gibt, für die das Integral I_j durch eine Summe ersetzt werden kann [98].

Es sei $A := \{(\theta_1, .., \theta d-2, \varphi)\}$ die Menge der Punkte aus S^{d-1}, die entsteht, wenn $\cos\theta_1$,...,$\cos\theta_{d-1}$ und φ unabhängig voneinander die Mengen $A_1, A_2, .., A_{d-1}$ durchlaufen. A ist dann ein sphärisches Design der Ordnung t. Daß dazu notwendigerweise $n \geq Const \cdot t^{12 \cdot t^4}$ sein muß, wird in [98] bewiesen. Auch die zweite Aussage kann man als Folgerung des Satzes beweisen [99]. Auch hier muß man man den Satz auf eine spezielle Funktionenklasse ϕ anwenden.

Durch die Gleichungen

$$T_{2j}(x) = ((1-\cos(\epsilon x))/(\epsilon^2/2)^j) \text{ und } T_{2j+1} = T_{2j} \cdot \sin(\epsilon x)/\epsilon.$$

erhält man eine Menge $\{T_0, .., T_t\}$ von Funktionen. Um ϕ zu erhalten muß man nur noch diese Menge orthogonalisieren. Dabei ist ϵ ein positiver reeller Parameter.

Es sei $D_\mu = \{\beta_{1\mu} \leq \theta_\mu \leq \beta_{2\mu}\}$ ein rechteckiger Bereich auf S^{d-1}. Da man ein größeres Gebiet stets in mehrere Teilgebiete zerlegen kann, können wie den Bereich D als genügend klein annehmen. Dann kann man mit ähnlichen Methoden beweisen, daß es *für jeden Bereich $D \subseteq S^{d-1}$ dieser Gestalt eine von D unabhängige, natürliche Zahl $n_0(t, d)$ gibt, sodaß es für jedes (d-1)-Tupel natürlicher Zahlen $(m_1, .., m_{d-1})$ mit $m_j \geq n_0$ eine Menge von $\prod_{j=1}^{d-1} m_j$ Punkten aus D gibt, die ein sphärisches Design der Ordnung t bildet* [98].

Für den Satz selbst soll nun eine Beweisskizze folgen. Die exakte Ausführung des Beweises findet sich in [98].
Wir starten bei der natürlichen Annahme, daß die Menge der Interpolationspunkte $-1 < \xi_1 < .. < \xi_n < 1$ eine Verteilung besitzt, die zu der durch die Gewichtsfunktion w induzierten Verteilung "nahe" steht, und verwenden dann die folgenden drei Schritte:
(1) Wir zerlegen das Intervall [-1,+1] in n Teilintervalle $I_1 = [x_0, x_1]$, $I_1 = [x_1, x_2]$,..., $I_n = [x_{n-1}, x_n]$ von gleicher w-Länge. Das bedeutet, daß

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} w(x)\,dx = 1/n$$

sein soll. Klarerweise ist $x_0 = -1$ und $x_n = +1$ zu setzen.
Im Inneren eines jeden Intervalles I_j wählen wir den eindeutig bestimmten Punkt u_j, für den gilt:

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} x \cdot w(x)dx = u_j/n$$

(2) Die Menge $\{u_1, .., u_n\}$ benützen wir als Startmenge eines Newton'schen Iterationsprozesses. Das bedeutet, daß die Punkte u_j sukzessive durch die besser approximierenden Punkte $u_j+h_j^{(1)}$ $u_j+h_j^{(1)}+h_j^{(2)}$ .. ersetzt werden. Die Korrekturglieder $h_j^{(l)}$ können [98] mittels Lagrangemethode so gewählt werden, daß $\sum_{j=1}^n (h_j^{(k)})^2$ minimal wird. Dabei ist die geforderte w-Orthogonalität nötig, um die auftretenden Korrekturglieder klein halten zu können.
(3) Die Iterationsprozedur erzeugt rekursive Ungleichungen für die Korrekturglieder $h_j^{(l)}$ und für den Fehler

$$\mathcal{F} = \max_{\nu=1...s} |\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1} f_\nu(u_j + h_j^{(1)} + ... + h_j^{(k)} - \int_{-1}^{+1} f_\nu(x) \cdot w(x)dx|.$$

Da für hinreichend große n der Fehler $\mathcal{F}$ mit wachsendem k nach Null strebt, und da die Grenzpunkte $u_j + \sum_{l=1}^{\infty} h_j^{(k)}$ existieren, paarweise disjunkt sind und in [-1,+1] liegen, können wir den Beweis schließen. $\diamondsuit$

2.5 Invarianzprinzip

Nun wollen wir Diskrepanzkonzepte einführen, die abhängen vom Abstand der Punkte $\{P_1, .., P_n\}$ untereinander, und die darauf basieren, Mittelwerte von Abstandfunktionen und Abstandfunktionalen zu bilden.
Wir stellen uns dabei vor, in jedem der n ausgewählten Punkte $\{P_1, .., P_n\}$ befindet sich eine Energieeinheit. Wir suchen zunächst nach einer Auswahl $\{P_1, .., P_n\}$, die sich bei jeder Kraft, die nur zwischen je zwei Punkten interagiert, im Gleichgewicht befindet.

Leech [49] bewies, daß eine Anordnung, die sich bei jeder Kraft, die nur vom Abstand der Punkte untereinander abhängt, im Gleichgewicht befindet, eine hohe Symmetrie aufweisen muß:
Sie muß Rotationssymmetrie in Bezug auf jede Achse, die durch einen Punkt der Anordnung und den Kugelmittelpunkt hindurchgeht, aufweisen.

Die Anordnungspunkte können daher nur Eckpunkte von Polyedern sein, die der Sphäre einbeschrieben sind und bei denen alle Ecken auf Rotationsachsen liegen. Daher kommen als Lösungen nur in Betracht:

1. reguläre Polygone mit Ecken auf einem Großkreis

2. Platonische Körper, deren Dualkörper und Eckableitungen

3. bestimmte Polyeder, deren Eckenmenge durch Vereinigung von Ecken von Polyedern der ersten beiden Fälle entstehen.

[Unter einer Eckableitung ist hier die konvexe Hülle der Kantenmittelpunkte des Ausgangspolyeders zu verstehen.]
Es kann daher das gestellte Problem nur für n = 4, 6, 8, 10, 12, 14, 18, 20, 26, 30, 32, 42, 50, 62 gelöst werden [49].
Sind auf einer d-dimensionalen Kugel d+2 Punkte zu verteilen, so liegen sie meist optimal, wenn sie die Ecken eines Simplex bilden. Dieser Sachverhalt, der bereits bei den Lagerungsproblemen auftaucht, gilt auch für den Betrags des inneren Produktes [79]. Es ist dann:

$$\sum_{1\le i<j\le d+2} |P_i \cdot P_j|^\alpha \ge \frac{d+2}{2(d+1)^{\alpha-1}} \tag{2.17}$$

Nun soll der Begriff "Abstand" allgemeiner definiert werden. Dazu sei (wie in [2.3]) $G = SO(3)$ die spezielle orthogonale Gruppe auf S^{d-1}, also die Gruppe der Drehungen der S^{d-1}. Für $\tau \in G$ sei $\int_G f\,d\tau$ das Haar'sche Integral der Funktion f. Dieses ist im wesentlichen gleich dem Integral über S^{d-1} in Bezug auf das Oberflächenmaß $d\omega$.
Es sei N = (1,0,..,0) der "Nordpol" der S^{d-1}. P_1 und P_2 seien zwei Punkte der S^{d-1} und $g = g(z)$ sei eine auf [0,1] definierte integrable Kernfunktion. Dann ist

$$d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2) := d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,g) := \int_G \int_a^b g(z)\,dz\,d\tau. \tag{2.18}$$

für positives g eine Metrik auf S^{d-1} [78]. Die Integrationsgrenzen werden dabei auf folgende Weise erhalten:
Wir unterwerfen die Punkte P_1 und P_2 der Drehung τ. Von den gedrehten Vektoren τP_1 und τP_2 nehmen wir jeweils die erste Koordinate und ordnen der Größe nach. Das können wir so anschreiben: $a = \min\{\tau P_1 \cdot N, \tau P_2 \cdot N\}$ und $b = \max\{\tau P_1 \cdot N, \tau P_2 \cdot N\}$. Das Funktional d ist unabhängig von τ, denn für jedes $\tau_1 \in G$ sind die Grenzen der inneren Integration:
$a = \tau_1\tau P_1 \cdot N = \tau' P_1 \cdot N$ und $b = \tau_1\tau P_2 \cdot N = \tau' P_2 \cdot N$.
Da über ganz $G = SO$ integriert wird, ist

$$d(\tau_1\mathbf{x}_1, \tau_1\mathbf{x}_2) = d(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2).$$

Für $g \equiv 1$ ist $\int_a^b g(z)dz = b - a = |\tau P_1 \cdot N - \tau P_2 \cdot N|$. Da die Drehung eine lineare Transformation ist, gilt:

$$|\tau P_1 \cdot N - \tau P_2 \cdot N| = |(\tau P_1 - \tau P_2)\cdot N| = |(P_1 - P_2)\cdot \tau^{-1}N|$$

τ bewegt sich durch ganz G und daher können wir von N aus jeden Punkt der S^{d-1} durch eine Drehung erreichen. Somit können wir $\tau^{-1}N$ durch einen

Punkt $\mathbf{u}$ der S^{d-1} und das Haar'schen Integrals durch das Oberflächenintegral ersetzen.
Für $g \equiv 1$ ergibt sich daher, wenn $\mathbf{x}$ einen Punkt der S^{d-1} bezeichnet:

$$d(P_1, P_2) = \int_{S^{d-1}} |(P_1 - P_2) \cdot \mathbf{u}| d\omega(\mathbf{u}) =$$

$$\| P_1 - P_2 \|_2 \cdot \int_{S^{d-1}} |\mathbf{u} \cdot (P_1 - P_2) / \| P_1 - P_2 \|_2 | d\omega(\mathbf{u}) =$$

$$\| P_1 - P_2 \|_2 \cdot \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| d\omega(\mathbf{u}).$$

Das Integral kann man durch folgende Überlegung berechnen :
Das inneren Produkt zweier Vektoren ist bekanntlich gleich dem Produkt des Betrages des ersten Vektors mit dem Betrag der Projektion des zweiten Vektors auf den ersten.
Es sei $\mathcal{H}$ die Hyperebene, die normal zum ersten Vektor steht und die den Ursprung der S^{d-1} enthält. Wir halten nun den Vektor $\mathbf{x}$ in $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ fest und bewegen $\mathbf{u}$ über ganz S^{d-1} . Dann überstreicht die vektorielle Projektion von $\mathbf{u}$ die (d-1)-dimensionale Kugel, die von $\mathcal{H}$ aus B^d herausgeschnitten wird, aus Symmetriegründen zweimal vollständig.
Daher hat das obige Integral den Wert $2 \cdot \kappa_{d-1}$:

$$\int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| d\omega(\mathbf{u}) = 2\kappa_{d-1}, \tag{2.19}$$

Faßt man die soeben durchgeführten Überlegungen zusammen, so erkennt man, daß durch die Kernfunktion $g \equiv 1$ der euklidischen Abstand erzeugt wird, wenn man von einer multiplikativen Konstanten absieht.

Damit können wir definieren:
Es sei $\mathcal{P} := \{P_1, ..., P_n\}$ eine n-elementige Menge von Punkten der S^{d-1} und d sei ein Abstand im Sinne von (2). Unter einer *Potenzsumme* verstehen wir dann das Funktional:

$$E_\alpha(\mathcal{P}) := \sum_{i<j} d(P_i, P_j)^\alpha$$

bzw.

$$E_\alpha := \max_{\mathcal{P}} E_\alpha(\mathcal{P})$$

Für sehr große, natürliche α nähert sich die optimale Verteilung der Potenzsumme der optimalen Verteilung des Unterdeckungsproblemes [s. I.6].
Ähnliche Potenzsummen kann man auf jedem konvexen Körper definieren; der Körper, bei dem diese Summen für den euklidischen Abstand am größten werden können, ist stets die Kugel, wie Groemer [36] gezeigt hat.

Ist $C(t) := \{\mathbf{y} \in S^{d-1} : \mathbf{y} \cot N \leq t\}$ die Kappe um N mit Radius t, so gilt für $\alpha = 1$ das "Invarianzprinzip" [78]:

$$E_1(\mathcal{P}) + \int_{-1}^{+1} g(t) \cdot \Big(\int_{S^{d-1}} (\#\{\mathcal{P} \cap \tau(C(t))\} - n \cdot \omega^*(t))^2 d\tau \Big) d\omega(t) = K \cdot n^2 \tag{2.20}$$

Die Konstante K ist dabei gleich $1/2 \cdot \omega_{d-1} \cdot \int \int d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) d\omega(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{y})$, wobei jedesmal über S^{d-1} zu integrieren ist, ω^* ist wiederum das normierte Oberflächenmaß auf S^{d-1}.

Der Beweis benötigt man das Lemma ([78]; [1]):
Für reelle Zahlenfolgen $p_1 \leq ... \leq p_u$ und $q_1 \leq ... \leq q_v$ gilt:

$$\sum_{i,j} \int_{p_i}^{q_j} g(z) dz - \sum_{i<j} \int_{p_i}^{p_j} g(z) dz - \sum_{i<j} \int_{q_i}^{q_j} g(z) dz =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot \mathcal{G}(x) \cdot (\mathcal{G}(x) - (u - v)) dx$$

mit $\mathcal{G}(x) := \#\{p_i \leq x\} - \#\{q_j \leq x\}$.
Für u = v und $g \equiv 1$ ist $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^2 dx \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |\mathcal{G}|^2 dx = \sum_{i=1}^{n} |P_i, Q_i|$. Zum Beweis des Satzes setzen wir $u = v = n$ und geben uns zwei Punktfolgen $\mathcal{P}_p = \{P_1, .., P_n\}$ und $\mathcal{P}_q = \{Q_1, .., Q_n\}$ vor. Dann wählen wir drei Transformationen $\tau, \phi_1, \phi_2 \in G$ und setzen

$$p_i := \tau f_1 P_i \cdot N \text{ und } q_i := \tau f_2 Q_j \cdot N.$$

Damit schreibt sich die rechte Seite von (4) an als:

$$2 \cdot K \cdot n^2 = \int_G \int_G \sum_{i,j} d(\phi_1 P_i, \phi_2 Q_j) d\phi_1 d\phi_2.$$

Jetzt rufen wir uns (2) in Erinnerung. Die Anwendung des Lemmas auf $\sum_{i,j} d(\phi_1 P_i, \phi_2 Q_j)$ ergibt dann:

$$\sum_{i,j} d(\phi_1 P_i, \phi_2 Q_j) = \sum_{i,j} \int_G \int_{p_i}^{q_j} g(z) dz d\tau = [Lemma] =$$

$$\int_G (\int_{-\infty}^{+\infty} g(z) \cdot \mathcal{G}(z, \tau) \cdot (\mathcal{G}(z, \tau) - 0) dz + \sum_{i<j} \int_{p_i}^{p_j} g(z) dz - \sum_{i<j} \int_{q_i}^{q_j} g(z) dz) d\tau =$$

$$\int_G \int_{-1}^{+1} g(z) \mathcal{G}^2(z, \tau) dz d\tau + \sum_{i<j} \int_G \int_{p_i}^{p_j} g(z) dz d\tau - \sum_{i<j} \int_G \int_{q_i}^{q_j} g(z) dz d\tau =$$

$$\int_G \int_{-1}^{+1} g(z) \cdot (\mathcal{G}(z, \tau))^2 dz d\tau + \sum_{i<j} d(p_i, p_j) + \sum_{i<j} d(q_i, q_j),$$

da d unabhängig von der Wahl der Transformationen ist.
Dabei ist

$$\mathcal{G}(z,\tau) := \#\{p_i \cdot N \le z\} - \#\{q_i \cdot N \le z\} =$$

$$\#\{\tau\phi_1 P_i \cdot N \le z\} - \#\{\tau\phi_2 P_i \cdot N \le z\} =$$

$$\#\{\mathcal{P}_p \cup \phi_1(C(z))\} - \#\{\mathcal{P}_q \cup \phi_2(C(z))\} =: \#_p - \#_q.$$

Daraus ergibt sich: $2 \cdot K \cdot n^2 = \frac{n^2}{\omega_{d-1}} \cdot \iint_{S^{d-1}} d(\mathbf{x},\mathbf{y}) d\omega(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{y}) =$

$$\iint_{S^{d-1}} \sum_{i,j} d(\phi_1 P_i, \phi_2 Q_j) d\phi_1 d\phi_2 = \sum_{i<j} d(p_i,p_j) + \sum_{i<j} d(q_i,q_j)$$

Ist $n^* = n \cdot \omega^*(C(z))$, so ist $\int_G (\#_p - n^*) d\phi_1 = 0$, da n^* gleich dem Erwartungswert von $\#_p$ ist. Daher ist der Rest gleich:

$$\int_{-1}^{+1} \int_G \int_G g(z) \cdot (\#_p - \#_q)^2 d\phi_1 d\phi_2 dz =$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_p - n^*)^2 d\phi_1 dz + \int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_q - n^*)^2 d\phi_2 dz -$$

$$-2 \cdot \int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_p - n^*) d\phi_1 dz \cdot \int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_q - n^*) d\phi_2 dz =$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_p - n^*)^2 d\phi_1 dz + \int_{-1}^{+1} \int_G g(z) \cdot (\#_q - n^*)^2 d\phi_2 dz.$$

Daher ist $2 \cdot K \cdot n^2$ gleich der Summe der Diskrepanzen von $\mathcal{P}_p$ und $\mathcal{P}_q$ in Bezug zu $g(x)$. Setzen wir nun $\mathcal{P}_p = \mathcal{P}_q$ [dh. $P_i = Q_j$ für $1 \le i \le n$] und dividieren wir beide Seiten der Gleichung durch zwei, so erhalten wir die Behauptung $\diamondsuit$
Wenn wir das Integral auf der linken Seite der Gleichung (5) durch die Abschätzungen (2.4) und (2.8) ersetzen, so sehen wir, daß *es Konstanten* c_0, c_1 *und* c_2 *gibt, die nur abhängig sind von der Dimension* d*, sodaß gilt:*

$$c_1 \cdot n^{1-1/(d-1)} < c_0 \cdot n^2 - E_1 < c_2 \cdot n^{1-1/(d-1)}$$

2.6 Potenzsummen und Potentiale

Nachdem wir die Potenzsumme für $\alpha = 1$ abschätzen konnten, wollen wir eine Abschätzung der Summe in beide Richtungen für $0 < \alpha < 2$ angeben.
Wie im vorigen Paragraphen wird auch hier die Potenzsumme mit dem zu erwartenden Mittelwert in Verbindung gesetzt, den wir so definieren:
Es sei $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ eine Menge von n Punkten auf S^{d-1}, $|P,Q|$ sei der Euklidische Abstand.

Für $Q \in S^{d-1}$, $P_i \in \mathcal{P}$ und die Kernfunktion $|Q - P_j|^\alpha$ ist der gesuchte Mittelwert für $\alpha \neq 0$:

$$M(\alpha, d) = \frac{1}{d} \cdot \int_{S^{d-1}} |Q - P_j|^\alpha \, d\omega(Q) \tag{2.21}$$

Es gilt der folgende Satz [96, 99]:
Für $n \geq 2$ und für $0 < \alpha < 2$ gibt es eine n-elementige Punktmenge $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_n\}$ und gibt es vier positive Konstante c, c', k und k', die alle nur von α und d abhängen, sodaß gilt:

$$c \cdot n^{1-\alpha/(d-1)} \leq \sum |P_i, P_j|^\alpha - M(\alpha, d) \leq c' \cdot n^{1-\alpha/(d-1)} \tag{2.22}$$

Weiters gilt für $1 - d \leq \alpha \leq 3 - d$:

$$-k \cdot n^{1-\alpha/(d-1)} \leq \sum_{i \neq j} |P_i, P_j|^\alpha - M(\alpha, d) \tag{2.23}$$

und für $3 - d \leq \alpha < 0$ und $d \geq 4$ gilt:

$$-k \cdot n^{1-\alpha/(2-\alpha)} \leq \sum_{i,j} |P_i, P_j|^\alpha - M(\alpha, d) \tag{2.24}$$

[Man kann zeigen, daß die Ungleichung (3) bestmöglich ist.]

Für $\alpha = 0$ gilt:

$$\frac{n}{d-1} \cdot (\log n) + O(n) \leq \sum_{i \neq j} (\log |P_i, P_j| - \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} \log |Q - P_i| d\omega(Q)).$$

Umgekehrt gilt die Ungleichung:

$$\sum_{i \neq j} (\log |P_i, P_j| - \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} \log |Q - P_i| d\omega(Q)) \leq \frac{n}{2} \cdot (\log n) + O(n)$$

Der Satz beinhaltet für $\alpha = 1$ das Ergebnis von (II.5), sowie für die Verteilung von n Elektronen auf S^2 :

$$\sum_{i \neq j} |P_i, P_j|^{-1} \geq n^2 - c \cdot n^{3/2}. \tag{2.25}$$

Eng verwandt mit den Potenzsummen, die man auch als Energiesummen betrachten kann [96], sind Potentiale [96],[99], die für $\alpha \neq 0, 2, 4, ...$ definiert sind durch:

$$U_\alpha(\mathcal{P}, Q) = \sum_{j=1}^{n} |Q, P_j|^\alpha - \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} \log |Q - P_i|^\alpha d\omega(Q) \tag{2.26}$$

und für $\alpha = 0, 2, 4, ...$ durch:

$$U_\alpha(\mathcal{P}, Q) = -\sum_{j=1}^{n} |Q, P_j|^\alpha \cdot \log|Q, P_j|^\alpha - \frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} \log|Q - P_i|^\alpha \cdot \log|Q, P_j|^\alpha \, d\omega(Q)$$

Für diese gilt [Satz 2 in [97], Theorem A in [99]]:
Es gibt für $1 - d < \alpha$, aber $\alpha \neq 0, 2, 4..$ Konstante C und c, die nur von α und d abhängen, sodaß gilt:

$$c \cdot n^{-\alpha/(d-1)} \leq \quad \| U \|_1 \quad \leq \quad \| U \|_\infty \quad \leq C \cdot n^{-\alpha/(d-1)} \tag{2.27}$$

Unter $\| U_\alpha \|_\infty$ wollen wir dabei folgendes verstehen:

$$\| U_\alpha \|_\infty := \begin{cases} \max |U_\alpha(\mathcal{P}, Q)| & \text{\it für } \alpha > 0 \\ -\min U_\alpha(\mathcal{P}, Q) & \text{\it für } \alpha < 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

wobei wir über alle $Q \in S^{d-1}$ maximieren bzw. minimieren.
Da die beiden Funktionale zusammenhängen, beschränken wir uns hier auf eine Beweisskizze der Aussage (2.27).
Der Beweis der linken Seite von (2.27) benützt wieder die harmonische Analyse auf der Sphäre. Die Grundidee besteht darin, eine Testfunktion T zu konstruieren, die folgende Ungleichung erfüllt :

$$\| U_\alpha(\mathcal{P}, Q) \|_1 \geq \frac{1}{\omega_d} \cdot | \int_{S^{d-1}} U_\alpha(Q) \cdot T(Q) \, d\omega(Q) \quad | / \sup_{Q \in S^{d-1}} |T(Q)|.$$

Wir führen auf S^{d-1} Polarkoordinaten ein und betrachten die Differentialgleichung $\Delta_l h_l(cos\theta_1) = 1$. Dabei ist Δ der Laplace-Operator und θ_1 die erste Polarkoordinate des Punktes $P \in S^{d-1}$:

$$\Delta h_l(\cos\theta_1) = (\sin^{d-2}\theta_1 \cdot \frac{d}{d\theta_1}(\sin^{d-2}\theta_1 \cdot \frac{d}{d\theta_1}))^l \cdot h_l(\cos\theta_1)$$

Für eine gegebene Punktmenge $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\}$ definieren wir γ_i durch $2 \cdot \sin(\gamma_i/2) = |Q, P_i|$ und betrachten die Funktion:

$$H_l(Q) := \sum_{i=1}^{n} h_l(\cos\gamma_i(Q))$$

Nun zerlegen wir S^{d-1} in Rechtecke B_μ der Form:

$$Q = (\theta_1, ..., \theta_{d-1}) \in B_\mu \Leftrightarrow (\mu_\rho - 1) \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2^{-r} \leq \theta_\rho \leq \mu_\rho \cdot \frac{\pi}{6} \cdot 2^{-r}$$

Dabei gibt $\mu = (\mu_1, ..., \mu_{d-1})$ die Begrenzung des Rechteckes B_μ an. Es ist daher mit $\Theta_\rho := 6 \cdot \theta_r \cdot 2^r$:

$$\pi \cdot (\mu_\rho - 1) \leq \Theta_\rho \leq \pi \cdot \mu_\rho$$

Es sei nun $\Lambda := \bigcup\{B_\mu : P_i \notin B_\mu, j = 1..n\}$ die Menge aller Rechtecke, die keinen Punkt der Menge $\mathcal{P}$ enthalten. Durch die Wahl von r kann man erzwingen, daß $\sum_\Lambda \omega(B_\mu) \ll 1$ ausfällt, da man die Rechtecke beliebig klein machen kann.

Für jeden Punkt $Q \in B_\mu \in \Lambda$ sei $\tau_\mu(Q) := 4^{-lr} \cdot \prod_{\rho=1}^{d-1} \sin^{2l}(\Theta_\rho)$.

Dann können wir die gewünschte Testfunktion definieren:

$$T(Q) := \begin{cases} \Delta(2\theta)\Delta^l\tau_\mu(P) & für\ Q \in B_\mu \in \Lambda \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Es gilt: $\sup|T(Q)| \ll 1$

Es sei $k_\alpha(\cos\theta_1) := |2 \cdot \sin(\theta_1/2)|$; k_α^{-1} sei die zu k_α in Bezug auf das Faltungsprodukt inverse Funktion, das ist die Funktion, für die gilt:

$$k_\alpha^{-1} * k_\alpha = h_1.$$

Im letzten Beweisschritt für (7) verwendet man $T * k_\alpha^{-1}$ als Testfunktion für $U_\alpha(\mathcal{P}, Q)$ und wertet hier übergangene Ungleichungen aus [96].

Auch für den Beweis der rechten Seite wird S^{d-1} in Rechtecke B_μ zerlegt. Auf diese Rechtecke wird die Beck'sche Methode aus II.2 angewandt. Daher muß für sie gelten:

$$diam B_\mu \leq c_1 \cdot n^{-1/(d-1)}.$$

Für $0 < \alpha < 2$ halten wir einen Punkt $Q \in S^{d-1}$ fest und wenden auf die Rechtecke B_μ den zentralen Satz von II.5 an. Dadurch erhalten wir Interpolationspunkte $Q_\nu^{(\mu)}$. Es sei B die konvexe Hülle der Bereiche, in denen Interpolationspunkte liegen. Weiters teilen wir die Rechtecke B_μ durch folgende Bedingung in Klassen $M_q = M_{q,Q}$ (q = 0,1,..) ein:

$$B_\mu \in M_q \Leftrightarrow q \cdot c_1 \cdot n^{-1/(d-1)} \leq \min_{\mathbf{y}\in B} |\mathbf{x}, \mathbf{y}| \leq (q+1) \cdot c_1 \cdot n^{-1/(d-1)}$$

Wegen $diam B_\mu = \sup_{\mathbf{x},\mathbf{y}\in B_\mu} |\mathbf{x}, \mathbf{y}| \leq c_1 \cdot n^{-1/(d-1)}$ kann jede Klasse M_q maximal $\ll (q+1)^{d-2}$ Rechtecke enthalten.

Für jeden Bereich $B_\mu \in M_0$ ist

$$|n \cdot \int_{B_\mu} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha d\omega(\mathbf{y}) - \sum_\nu |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\nu^{(\mu)}|^\alpha| \leq$$

$$\leq n \cdot \omega(B_\mu) \cdot (2c_1 \cdot n^{-1/(d-1)})^\alpha + \sum_\nu (2c_1 \cdot n^{-1/(d-1)})^\alpha \ll n^{-\alpha/(d-1)}$$

Für die Bereiche M_q mit $q > 1$ kann man mittels Taylorreihe zeigen, daß:

$$|n \cdot \int_{B_\mu} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^\alpha d\omega(\mathbf{y}) - \sum_\nu |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\mu|^\alpha| \ll q^{\alpha-d-1} \cdot n^{-\alpha/(d-1)}$$

Addiert man diese beiden Ergebnisse zusammen, und beachtet man, daß $\mathcal{M}_q \ll (q+1)^{d-2}$ ist, so erhält man:

$$|n \cdot \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x}-\mathbf{y}|^\alpha \, d\omega(\mathbf{y}) - \sum_\nu |\mathbf{x}-\mathbf{x}_\nu|^\alpha| \ll$$

$$\ll n^{\alpha/(d-1)} \cdot (1 + \sum_{q=1}^\infty q^{d-2} \cdot q^{\alpha-d-1}) \ll n^{\alpha/(d-1)}$$

$\diamondsuit$

Anstelle von Abstandssummen [weitere Beispiele findet man in [102]-[104]] kann man Produkte von Abständen betrachten [97]:
Ist $\mathcal{P} = \{P_1, ..., P_n\} \subseteq S^{d-1}$ so gilt [97] für $R(P, \mathcal{P}) := \prod_{j=1}^n |P, P_j|$:
(P ist im folgenden stets ein Punkt auf S^{d-1})

$$\max_P R(P, \mathcal{P}) \geq (1 + c_1) \cdot (2/\sqrt{e})^n$$

$$\min_{\mathcal{P}} \max_P R(P, \mathcal{P}) \leq (1 + c_2) \cdot (2/\sqrt{e})^n$$

Für eine unendliche Folge $\overline{\mathcal{P}} = (P_1, P_2, ...)$ sei

$$A_n(\overline{\mathcal{P}}) = (2/\sqrt{e})^{-n} \cdot \max_P R(P, \mathcal{P}_n).$$

Dann ist für $c > 0$ und unendlich viele Werte von n:

$$A_n(\mathcal{P}) \geq e^{c\sqrt{\log n}}$$

Es ist weiters:

$$P := \prod_{j \neq k} |P_j, P_k| \leq \| \, n^{n/2+o(n)} \, \| \, .$$

Kapitel 3

Approximation der Kugel durch Polytope

3.1 Einige Maßzahlen konvexer Körper

Jeder konvexe Körper $K \in \mathcal{K}$ läßt sich auf verschiedene Weisen darstellen, z.B. durch die Angabe aller Punkte, die er enthält oder durch eine ausgezeichnete Eigenschaft, wie zB. bei der Kugel. Von besonderem Interesse sind Darstellungen konvexer Körper durch analytische Funktionen, da man mit ihnen in angenehmer Weise operieren kann.
So existiert z.B. zu jedem kompakten, konvexen Körper K ein nichtnegatives, positiv homogenes und subadditives Funktional $g(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, für das gilt:

$$K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : g(\mathbf{x}) \leq 1\} \tag{3.1}$$

Dieses g heißt die *Distanzfunktion* des Körpers K. Die genannten Bedingungen besagen, daß :

- $g(\mathbf{x}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \neq o$ [Nichtnegativität]
- $g(\lambda \cdot \mathbf{x}) = \lambda \cdot g(\mathbf{x}) \quad \forall \lambda \geq 0$ [Homogenität]
- $g(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \leq g(\mathbf{x}) + g(\mathbf{y})$ [Subadditivität].

Interessanter als die Distanzfunktion ist die *Stützfunktion* h eines kompakten, konvexen Körpers. Sie kann definiert werden als die Distanzfunktion des zu K dualen Körpers K^* (II.2). Also ist $h(\mathbf{u})$ diejenige Funktion, für die gilt:

$$K^* = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^d : h(\mathbf{u}) \leq 1\} \tag{3.2}$$

Aus der Definition der Dualmenge K^* als $\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \leq 1 \; \forall \mathbf{y} \in K\}$ (s II.2) folgt:

$$h(\mathbf{u}) = \sup_{\mathbf{x} \in K} \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}. \tag{3.3}$$

Eine Hyperebene $\mathcal{H}$ heißt Stützhyperebene eines konvexen Körpers K, wenn K ganz in einem der durch sie erzeugten Halbräume liegt und wenn $\mathcal{H} \cap K \neq \emptyset$ ist.
Besitzt ein Körper die Stützfunktion h, so besitzt die Stützhyperebene $\mathcal{H}$ mit Normalvektor $\mathbf{u}$ die Darstellung:

$$H(\mathbf{u}) = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = h(\mathbf{u})\}. \tag{3.4}$$

Weiteres über Distanz- und Stützfunktion findet man in Lehrbüchern der Konvexgeometrie, zB. in [40] oder in [51].
Mit Hilfe der Stützfunktion können wir nun die *Breite* $b(\mathbf{u})$ eines konvexen Körpers K in Richtung $\mathbf{u}$ verstehen als:

$$b(\mathbf{u}) = h(\mathbf{u}) + h(-\mathbf{u}) \tag{3.5}$$

Mittelt man dieses Funktional über alle Richtungen $\mathbf{u}$, das heißt, bildet man das Integral über die Oberfläche $\omega(\mathbf{u})$ der S^{d-1}, so erhält man die *mittlere Breite* $\bar{b}$:

$$\bar{b}(\mathbf{u}) := \frac{1}{d \cdot \omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} b(\mathbf{u}) d\omega(\mathbf{u}) \tag{3.6}$$

Ein weiterer zentraler Begriff in der Konvexgeometrie ist der Begriff des Parallelkörpers. Unter dem *Parallelkörper* K_ρ *im Abstand* ρ verstehen wir die Minkowski-Summe des Körpers K mit der Kugel $B(\rho)$, die den Radius ρ besitzt. Die *Minkowski-Summe* zweier Mengen A und B ist definiert als:

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\} \tag{3.7}$$

Das bedeutet, daß $K_\rho = K + B_\rho = \bigcup_{\mathbf{x} \in K} B(\mathbf{x}, \rho)$ ist. Das heißt:
wir schlagen um jeden Punkt $\mathbf{x}$ des Körpers $\mathcal{K}$ eine Kugel vom Radius ρ und bilden die konvexe Hülle der Vereinigung dieser Kugeln.
Der Parallelkörper B_r zur Einheitskugel, der den Abstand ρ besitzt, ist wiederum eine Kugel, diesmal mit Radius $1 + \rho$.
Das Volumen $V(K_\rho)$ eines Parallelkörpers ist ein Polynom in ρ, wie man aus der *Steiner'schen Formel* ersieht: $[\rho > 0]$

$$V(K_\rho) = \sum_{\nu=0}^{d} \binom{d}{\nu} W_\nu^{(d)}(K) \cdot \rho^\nu \tag{3.8}$$

In dieser Formel bezeichnet $W_\nu^{(d)}$ das *"ν-te Quermaßintegral der Dimension d "* . Da in der weiteren Arbeit dieses ansonsten sehr wichtige Funktional nicht mehr auftaucht, können wir auf eine exakte Definition verzichten. Eine solche findet man zum Beispiel in [51].

3.2 Approximation durch Polyeder

Will man den "Abstand" zweier konvexer Körper untersuchen, so muß man sich zunächst Gedanken darüber machen, wie dieser Abstand überhaupt gemessen werden kann, denn auf der Menge $\mathcal{K}$ der konvexen Körper gibt es keine ausgezeichnete Metrik.
Die gebräuchlichste Metrik ist die Hausdorffmetrik, die wir stets mit η bezeichnen wollen. Sie ist definiert als das Minimum der Zahlen ρ, für die gilt: $K_\rho \supset L$ und $L_\rho \supset K$, wobei wir mit K und L zwei konvexe Körper bezeichnen. Der Hausdorffabstand $\eta(K, L)$ läßt sich auch anschreiben durch:

$$\eta(K, L) = \max\{\sup_{\mathbf{x}\in K}\inf_{\mathbf{y}\in L} \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel, \sup_{\mathbf{x}\in L}\inf_{\mathbf{y}\in K} \parallel \mathbf{x} - \mathbf{y} \parallel\} \tag{3.9}$$

Man kann klarerweise nicht nur das Maximum der beiden Zahlen in der Klammer zu betrachten, sondern auch deren Mittel. Diese Mittel führen bei geeigneter Wahl der Gewichtung zu Metriken, die einen engen Bezug zu den l_p-Metriken haben [38].
Mehr Verwendung als derartige Metriken findet jedoch die Symmetrische Differenzmetrik, die für zwei konvexe Körper K und L so definiert ist:

$$\delta^S(K, L) := \lambda(K\backslash L) + \lambda(L\backslash K) \tag{3.10}$$

Dabei bezeichnen wir mit λ das Lebesguemaß des umgebenden $\mathbb{R}^d$. [Im folgenden wollen wir stets die Hausdorffmetrik verwenden, da in dieser Metrik die meisten Ergebnisse vorliegen.]
Wenn wir konvexe Körper durch konvexe Polyeder approximieren wollen, sind folgende Sätze wichtig [40]:

- *Ist $\epsilon > 0$ und ist $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper, so lassen sich stets zwei konvexe Polyeder P und Q finden, für die gilt:*

$$P \subset K \subset Q; \eta(K, P) < \epsilon; \eta(K, Q) < \epsilon. \tag{3.11}$$

- *Ist $K \in \mathcal{K}$ ein konvexer Körper und ist $\mu > 1$ eine beliebig vorgegebene Zahl, so läßt sich, wenn der Ursprung in geeigneter Weise in K angenommen wird, stets ein konvexes Polyeder P finden, das $P \subset K \subset P_\mu$ erfüllt.*

Um den ersten Satz zu beweisen, überdecken wir K durch endlich viele Würfel der Kantenlänge $s < \epsilon/\sqrt{k}$, von denen jeder Punkte mit K gemeinsam habe und die zB. durch ein achsparalleles Raster mit Maschen der Länge s gegeben sind. Es sei Q die konvexe Hülle der Vereinigung dieser Würfel. Dann ist $K \subset Q$ und $Q \subset K_{\sqrt{k}\cdot s} = K_\epsilon$, und daher $\eta(K, Q) < \epsilon$.
Weiters überdecken wir K durch endlich viele Würfel der Kantenlänge $s < 2\epsilon/\sqrt{k}$, deren Mittelpunkte alle zu K gehören sollen. Auch hier wäre an

ein Raster denkbar, allerdings sind eventuell Verschiebungen der einen oder anderen Rasterebene nötig, um die erforderlichen Bedingung erfüllen zu können. Nun sei P die konvexe Hülle der Würfelmittelpunkte. Dann ist $K \subset P_{\sqrt{k}\cdot s/2} = P_\epsilon$ und $P \subset K$ und damit $\eta(K,P) < \epsilon$ ♢
Für den Beweis der zweiten Aussage wählen wir den Ursprung $\mathbf{u}$ des umgebenden Raumes im Inneren von K, und zwar so, daß eine Kugel $B(\rho)$ mit Radius $\rho > 0$ um $\mathbf{u}$ ebenfalls noch ganz im Inneren von K liegt. Es sei $\Delta := \inf\{|\mathbf{x},\mathbf{y}| : \mathbf{x} \in \partial K; \mathbf{y} \in \partial B(\rho)\}$ der positive Abstand zwischen den Rändern dieser Körper.
Es sei ϵ mit $\Delta > \epsilon > 0$ und $(\mu - 1)\cdot\rho > \epsilon$ gegeben. Wegen $\Delta > \epsilon$ ist $B(\rho) \subset K_{-\epsilon} \subset P$. Es wäre sogar noch eine Parallelkugel mit Abstand Δ in K enthalten. Allerdings würde $B(\rho)_\Delta$ den Körper K in (mindestens) einem Punkt berühren.
Gemäß (3.11) gibt es stets ein Polyeder P mit $P \subset K \subset P_\epsilon$. Wird dieses Polyeder um den Faktor μ gestreckt, so werden die Trägerhyperebenen der Seitenflächen, die einen Abstand $p > \rho$ zum Ursprung haben, um die Länge $(\mu-1)\cdot p > (\mu-1)\cdot\rho > \epsilon$ nach außen verschoben. Daraus folgt: $P_\mu \supset P_\epsilon$ ♢

Wir betrachten wir nun die Approximation der B^3:
Es sei zunächst bemerkt, daß sich (I.3.8) und (I.3.10) in folgende Form bringen lassen [30]:
Ist ein Polyeder mit n Ecken oder n Flächen in eine konzentrische Kugelschale mit Umkugelradius R und Inkugelradius r eingebettet, so gilt mit der Konvention $\gamma_n = \frac{n}{n-2}\cdot\frac{\pi}{6}$:

$$\frac{R}{r} \geq \sqrt{3}\cdot\tan\gamma_n \tag{3.12}$$

Denn jede Überdeckung definiert ein Polyeder:

Man betrachte den Schnitt der Halbräume, die durch die Trägerhyperebenen der Kugelkappen begrenzt sind. Das sind die Hyperebenen, die die Kugelkappen von der Kugel trennen, und die den Kugelmittelpunkt in ihrem Inneren enthalten.
Besitzt ein Polyeder P von der Einheitskugel B^3 den Hausdorffabstand η, so ist aufgrund der Definition der Hausdorffmetrik [$P \subseteq B^3_\eta$] das Polyeder in einer Kugel vom Radius $1+\eta$ enthalten und enthält [wegen $B^3 \subseteq P$] eine Kugel vom Radius $1-\eta$.
Das heißt, daß die Abweichung eines n-eckigen oder n-flächigen Polyeders P_n von der Einheitskugel wegen $\eta \geq R/r$ stets die Ungleichung erfüllt:

$$\eta(P_n, B^3) \geq (\sin\gamma_n/\cos\gamma_n) > (2\pi)/(\sqrt{27}\cdot n) \tag{3.13}$$

Die Ungleichungen (4) und (5) lassen sich verschärfen [30], woraus man folgende Korollare erhält:

- $\frac{R}{r} \geq \tan\frac{\pi}{p} \cdot \tan\frac{\pi}{q}$ mit $p = \frac{2k}{f}$ und $q = \frac{2k}{e}$.
- Enthält ein n-seitiges Polyeder Q_n die Einheitskugel, so gilt :

$$V(Q_n) \geq (n-2) \cdot (3\tan^2\gamma_n - 1)\sin 2\gamma_n.$$

- Enthält ein n-eckiges Polyeder P_n die Einheitskugel, so gilt :

$$V(P_n) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (n-2) \cdot (3\tan^2\gamma_n - 1).$$

- Ist ein n-eckiges Polyeder P_n in der Einheitskugel so gilt :

$$V(P_n) \leq \frac{n-2}{6} \cdot (3 - \cot^2\gamma_n) \cdot \cot\gamma_n.$$

3.3 Zufallspolyeder

Eine erste Möglichkeit, Polyeder mit Kugel zu kombinieren, haben wir bereits im ersten Kapitel kennengelernt und im vorigen Paragraphen genauer betrachtet.
Bevor wir der Frage nachgehen, wie gut sich die Kugel durch Polyeder approximeren läßt, wollen wir den Erwartungswert bestimmter Maßzahlen eines *Zufallspolyeders* ermitteln. Darunter verstehen wir die konvexe Hülle von n zufällig ausgewählten Punkten auf der S^{d-1}.
Will man n Punkte gemäß einer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Sphäre auswählen, so muß man sich zuerst überlegen, auf welche Weise dies möglich ist. Üblicherweise wird dazu die Sphäre mit Polarkoordinaten ausgestattet. Wir können annehmen, daß die gewünschte Verteilung eine gewöhnliche mehrdimensionale Dichte besitzt. Für die Gleichverteilung muß wegen $\int_{S^{d-1}} f = 1$ die Dichte $f \equiv \frac{1}{\kappa_d}$ sein.
Es seien nun gemäß der Gleichverteilung n Punkte auf der S^{d-1} ausgewählt. In [15] wird der Erwartungswert der drei Maßzahlen Oberfläche, mittlere Breite und Anzahl der Seiten berechnet. Da die dabei erhaltenen Formeln zwar exakt, aber kompiliziert sind, werden auch einfachere asymptotische Abschätzungen aus ihnen hergeleitet.

Die zugrundeliegende Denkweise soll im folgenden anhand der Oberfläche erläutert werden.
Es ist zunächst zu bemerken, daß bei statistischen Überlegungen nur Polytope, deren Facetten Simplizes sind, eine Rolle spielen, da andere Polytoptypen nur mit Wahrscheinlichkeit Null auftreten können.
Unter einer *Facette* eines d-dimensionalen Polytopes P versteht man stets die (d-1)-dimensionalen Flächen von P.
Daher können wir die Oberfläche der konvexen Hülle der Punkte $\{P_1, .., P_n\}$ als Summe d-eckiger Facetten betrachten.

Wählen wir aus $\{P_1, .., P_n\}$ auf beliebige Weise d Punkte aus, die wir o.B.d.A. stets mit $P_1, .., P_d$ bezeichnen wollen, so ist die konvexe Hülle der d Punkte $P_1, .., P_d$ genau dann eine Facette eines konvexen, d-dimensionalen und n-eckigen Polytops, wenn die übrigen (n-d) Punkte $P_{d+1}, .., P_n$ auf ein und derselben Seite der Hyperebene $\mathcal{H}$ zu liegen kommen, die durch $P_1, .., P_d$ aufgespannt wird.
Diese Hyperebene $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{u}, t)$ zerlegt die Vollkugel B^d in zwei Kugelkappen, eine mit Höhe 1-t und eine mit Höhe 1+t. Dabei bezeichnet t den Abstand der Hyperebene zum Ursprung.
Wird mit $\overline{\omega} = \omega(P_1, .., P_d)$ die Oberfläche der kleineren Kugelkappe bezeichnet, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Punkt auf diesem Teil der Kugel liegt, gleich $\overline{\omega}/\omega_d$, das ist Kugelkappenoberfläche/Gesamtkugeloberfläche. Die Wahrscheinlichkeit, daß er auf der anderen Kugelkappe liegt, ist gleich der Gegenwahrscheinlichkeit $1 - \overline{\omega}/\omega_d$.
Die P_i's sind gleichmäßig und unabhängig voneinander über S^{d-1} verteilt, und daher tritt das Ereignis, daß alle n-d Punkte $P_{d+1}, .., P_n$ vollständig in einem der beiden Kugelteile liegen, mit Wahrscheinlichkeit $q_{n,d}$ ein:

$$q_{n,d} = (\overline{\omega}/\omega_d)^{n-d} + (1 - \overline{\omega}/\omega_d)^{n-d} \tag{3.14}$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_{n,d}$ hängt klarerweise nur von den Parametern der Trägerhyperebene ab, da eine Veränderung der Punkte innerhalb dieser Hyperebene keinen Einfluß auf den Abstand der Hyperebene vom Ursprung der S^{d-1} besitzt. Daher können wir $q_{n,d}$ als Funktional der Hyperebenenparameter $\mathbf{u}$ und t betrachten: $q_{n,d} = q_{n,d}(P_1, .., P_d) = q_{n,d}(\mathbf{u}, t)$.
Weiters sei folgende Konvention eingeführt: Um die folgenden Formeln übersichtlich gestalten zu können, schreiben wir unter das Integralzeichen immer nur die Variable, für die das Zeichen gilt. Integriert wir immer über S^{d-1}. Bei reellen Integrationsparametern wird wie üblich das Integrationsintervall angegeben.
Die Punkte $P_1, ..., P_d$ spannen im $\mathbb{R}^d$ ein (d-1)-dimensionales Simplex auf, dessen Inhalt $T := T(P_1, ..., P_d)$ sei. Dann ist:

$$E(q_{n,d} \cdot T) = \int_{P_1} ... \int_{P_d} q_{n,d}(P_1 ... P_d) \cdot T(P_1 ... P_d) \frac{d\omega(P_1)}{\omega_d} ... \frac{d\omega(P_1)}{\omega_d}$$

der Erwartungswert des Volumens der Facette $conv\{P_1, .., P_d\}$. Da es stets $\binom{n}{d}$ Möglichkeiten gibt, aus n Punkten d auszuwählen, gilt für den Erwartungswert der Gesamtoberfläche $\omega_{n,d}$:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \int_{P_1} ... \int_{P_d} q_{n,d}(P_1 ... P_d) \cdot T(P_1 ... P_d) \frac{d\omega(P_1)}{\omega_d} ... \frac{d\omega(P_1)}{\omega_d}$$

Gemäß [64] kann man die unabhängige und gleichverteilte Auswahl von d Punkten auf der S^{d-1} stochastisch äquivalent durch folgende sequentielle

Konstruktion ersetzen :
(i) Wähle eine Trägerhyperebene $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{u}, t)$ mit dem als Sphärenelement gleichmäßig verteilten Normalvektor $\mathbf{u}$ und mit dem Abstand t vom Mittelpunkt der S^{d-1}.
Dieser besitze als Zufallsvariable $(-1 \le t \le 1)$ die Dichte:

$$2 \cdot (1-t^2)^{(d^2-2d-1)/2} / (B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot (d-1)^2)) \tag{3.15}$$

Mit $B(p,q)$ wird hier die Beta-Verteilung mit den Parametern p und q bezeichnet. Im folgenden werden wir stets die Abkürzung $\mathbf{B} := B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \cdot (d-1)^2)$ verwenden.
(ii) Der Schnitt dieser Hyperebene mit der Sphäre ist der Rand einer (d-1)-dimensionalen Vollkugel mit Radius $(1-t^2)^{(1/2)}$, deren sphärisches, (d-2)-dimensionales Oberflächenmaß im weiteren mit ω' bezeichnet wird.

Da die Oberfläche einer d-dimensionalen Kugel mit Radius r gegeben ist durch $r^{d-1} \cdot \omega_d$, ist

$$\omega'(S^{d-1} \cap \mathcal{H}) = (1-t^2)^{(d-2)/2} \cdot \omega_{d-1}.$$

(iii) Wähle nun d Punkte $P_1', .., P_d'$ aus dem Schnitt von $\mathcal{H}$ und S^{d-1}. Die Auswahl der Punkte $P_1', .., P_d'$ erfolge dabei gemäß einer gemeinsamen Gleichverteilung mit der Gewichtung

$$(d-1)! \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \cdot \frac{\omega_{d-1}^d}{\omega_d^{d-1}} \cdot \frac{1}{(1-t^2)^{(d-1)/2}} \cdot T(P_1', ..., P_d'). \tag{3.16}$$

Es ist bei diesen Dichten zu beachten, daß die auftretenden Oberflächenmaße auf 1 zu normieren sind, um Wahrscheinlichkeitsmaße zu erhalten. Daher wird $\omega(P_i')$ im folgenden stets durch $(1-t^2)^{(d-2)/2} \cdot \omega_{d-1}$ dividiert.
Die Auswahl von $P_1, .., P_d$ erfolgt also gemäß einer Dichte, die gleich ist dem Produkt der beiden Dichten (2) und (3). Daher ist:

$$\frac{d\omega(P_1)}{\omega_d} \cdots \frac{d\omega(P_d)}{\omega_d} =$$

$$\frac{2}{\mathbf{B}} \cdot (1-t^2)^{(d^2-2d-1)/2} \cdot dt \cdot d\omega(\mathbf{u}) \cdot (d-1)! \cdot \frac{\mathbf{B}}{2} \cdot \frac{\omega_{d-1}^d}{\omega_d^{d-1}} \cdot$$

$$\frac{T(P_1', ..., P_d')}{(1-t^2)^{(d-1)/2}} \cdot \frac{d\omega(P_1')}{(1-t^2)^{(d-2)/2} \cdot \omega_{d-1}} \cdot ... \cdot \frac{d\omega(P_d')}{(1-t^2)^{(d-2)/2} \cdot \omega_{d-1}} =$$

$$= (d-1)! \cdot \frac{\omega_{d-1}^d}{\omega_d^{d-1}} \cdot T(P_1', ..., P_d') \cdot \frac{d\omega'(P_1')}{\omega_{d-1}} \cdot ... \cdot \frac{d\omega'(P_d')}{\omega_{d-1}} \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{d/2}} \cdot d\omega(\mathbf{u}).$$

Damit kann der Erwartungswert $E(\omega_{n,d})$ umgeformt werden zu:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \int_{P_1} ... \int_{P_d} q_{n,d}(P_1...P_d) \cdot T(P_1...P_d) \frac{d\omega(P_1)}{\omega_d} ... \frac{d\omega(P_d)}{\omega_d} =$$

$$= \binom{n}{d} \cdot \int_{P_1'} ... \int_{P_d'} ... \int_{\mathbf{u}} \cdot \int_{-1}^{+1} q_{n,d}(P_1'...P_d') \cdot T(P_1'...P_d') \cdot (d-1)! \cdot \frac{\omega_{d-1}^d}{\omega_d^{d-1}} \cdot$$

$$\cdot (d-1)! \cdot T(P_1', ..., P_d') \cdot \frac{d\omega'(P_1')}{\omega_{d-1}} \cdot ... \cdot \frac{d\omega'(P_d')}{\omega_{d-1}} \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{d/2}} \cdot d\omega(\mathbf{u}) =$$

$$= \binom{n}{d} \cdot \frac{(d-1)!}{\omega_d^d} \int_{P_1'} ... \int_{P_d'} ... \int_{\mathbf{u}} \cdot \int_{-1}^{+1} q_{n,d}(P_1'...P_d') \cdot T^2(P_1'...P_d')$$

$$d\omega'(P_1')...d\omega'(P_d') \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{d/2}} \cdot d\omega(\mathbf{u})$$

Da die Wahrscheinlichkeit $q_{n,d}$ nur von der Trägerhyperebene $\mathcal{H}$ abhängt, können wir $q_{n,d}$ aus dem Integral über die P's herausziehen, da sich diese nur innerhalb $\mathcal{H}$ bewegen. Das ergibt:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \frac{(d-1)!}{\omega_d^d} \int_{\mathbf{u}} \cdot \int_{-1}^{+1} q_{n,d}(\mathbf{u}, t) \cdot$$

$$\cdot \left(\int_{P_1'} ... \int_{P_d'} T^2(P_1'...P_d') d\omega'(P_1')...d\omega'(P_d') \right) \cdot \frac{dt}{(1-t^2)^{d/2}} \cdot d\omega(\mathbf{u})$$

Als nächstes wollen wir den Wert des Integrals über $\omega'(P_i')$ bestimmen, und nehmen uns dazu das zweite Moment folgender Zufallsvariable zu Hilfe:
Das (d-1)-dimensionale Volumen der konvexen Hülle von d Punkten, die auf der Oberfläche einer (d-1)-dimensionalen Kugel mit Radius r liegen, habe die Dichtefunktion *f*. Es ist dann [64]:

$$\int x^2 \cdot f(x) dx = \frac{r^{2(d-1)} \cdot d}{(d-1)! \cdot (d-1)^{(d-1)}}$$

Mit der entsprechenden Gewichtung erhält man daraus [15]:

$$\left(\int_{P_1'} ... \int_{P_d'} T^2 d\omega'(P_1')...d\omega'(P_d') \right) = \left((1-t^2)^{(d-2)/2} \cdot \omega_{d-1} \right)^d \frac{(1-t^2)^{(d-1)} \cdot d}{(d-1)! \cdot (d-1)^{(d-1)}}$$

Wenn wir dieses Resultat in die Formel für den Erwartungswert einsetzen, ergibt dies:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \frac{(d-1)!}{\omega_d^d} \cdot \frac{\omega_{d-1}^d}{(d-1)!} \cdot \frac{d}{(d-1)^{d-1}} \cdot$$

$$\int_{\mathbf{u}} \cdot \int_{-1}^{+1} q_{n,d}(\mathbf{u}, t) \cdot (1-t^2)^{\frac{d^2-2d}{2} + \frac{2d-2}{-} \frac{d}{2}} dt d\omega(\mathbf{u}) =$$

$$\binom{n}{d} \cdot \left(\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d}\right)^d \cdot \frac{d}{(d-1)^{d-1}} \cdot \int_{\mathbf{u}} \cdot \int_{-1}^{+1} q_{n,d}(\mathbf{u}, t) \cdot (1-t^2)^{(d^2-d-1)/2} dt d\omega(\mathbf{u})$$

Es wurde bereits bemerkt, daß $\overline{\omega}$ die Oberfläche einer d- dimensionalen Kugelkappe mit Höhe 1-t ist. Man kann die Oberfläche ausdrücken durch [15]:

$$\omega_{d-1} \cdot \int_t^1 (1-s^2)^{(d-3)/2} ds = \begin{cases} \overline{\omega} & f\ddot{u}r\ 0 \ \leq t \ \leq 1 \\ \omega_d - \overline{\omega} & f\ddot{u}r\ -1 \ \leq t \ \leq 0 \end{cases}$$

Damit erhält man:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \frac{d \cdot \omega_{d-1}}{(d-1)^{d-1}} \cdot \cdot (\frac{\omega_{d-1}}{\omega_d})^{d-1} \cdot$$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\omega_{d-1}}{\omega_d} (\int_t^1 (1-s^2)^{(d-2)/3} ds)^{n-d} \cdot (1-t^2)(1-t^2)^{(d^2-d-1)/2} dt$$

Das innere Integral ($\int ds$) kann durch partielles Integrieren und explizites Ausrechnen noch umgeformt werden [15]:

$$E(\omega_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot d \cdot \omega_{d-1} \cdot \gamma_{d-1}^{d-1} \cdot \sum_{k=0}^{n-d} (-1)^k \cdot \binom{n-d}{k} \cdot \gamma_r^{n-d-k} \cdot S \qquad (3.17)$$

Um diese Formel übersichtlicher gestalten zu können, wurden folgende Abkürzungen verwendet :

- $\gamma_0 := \frac{1}{2}$, $\gamma_{p+1} := \frac{1}{2\pi \cdot (p+1) \cdot \gamma_p} = \frac{\Gamma(p+1)}{2^{p+1}} \cdot (\frac{1}{\Gamma(\frac{p+1}{2})})^2$ für $p \in \mathbb{N}$.
- $r = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ d\ gerade \\ 1 & f\ddot{u}r\ d\ ungerade \end{cases}$
- $S := \sum_{j=0}^{(d-r-3) \cdot k/2} [\gamma_r, \gamma_{r+2}, ..., \gamma_{d-3}]_j^k \cdot I(r \cdot (n-d-j), d^2-d+2j+r \cdot k-1, k)$

Dabei ist $[c_0, c_1, .., c_l]_j^k$ der j-te Koeffizient von:

$$(\sum_{i=0}^{l} c_i \cdot x^i)^k = \sum [c_0 ... c_r]_j^k \cdot x^j$$

Weiters setzt man $\cos x := t$ und:

$$I(m, p, q) := \int_0^{\pi} x^m \cdot \sin^p x \cdot \cos^q x dx$$

Das asymptotische Verhalten ist für die Oberfläche gleich:

$$\omega_d - \frac{1}{2(d-2)! \cdot (d+1)} \cdot \omega_{d-1} \cdot \gamma_{d-1}^{\frac{d+1}{d-1}} \Gamma(d + \frac{d}{d+2}) \cdot \frac{1}{n^{2/(d-1)}} \cdot (1+o(1)).$$

hat also einen Fehlbetrag der Ordnung $(C(d)/n^{2/(d-1)}) \cdot (1+o(1))$.

Weiters wird in [15] der Erwartungswert der Seitenanzahl der konvexen Hülle behandelt. Die asymptotische Abschätzung lautet bei dieser Fragestellung:

$$\frac{2}{d} \cdot \gamma_{(d-2)^2} \cdot \gamma_{(d-1)}^{-(d-1)} \cdot n \cdot (1 + o(1)).$$

Eine ähnliche Fragestellung wird in [45] untersucht. Autoren betrachten hier den Tangentialkörper, der aus n Punkten, die auf der S^{d-1} liegen, gebildet wird und fragen nach seiner zu erwartenden Eckenanzahl. Sie erhalten:

$$E(\#\{Ecken\}_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{I_{d-2}(r)}{I_{d-2}(\frac{\pi}{2})})^{n-d} \cdot C(d(d-2)) \cdot \sin^{d(d-2)} r \, dr$$

wo $I_k(r) := \int_0^r \sin^k x \, dx$ und $C(k) = \frac{2 \cdot \Gamma(\frac{1}{2} \cdot k+1)}{\Gamma(\frac{1}{2}) \cdot \Gamma(\frac{1}{2} \cdot k + \frac{1}{2})}$ zu setzen ist.

Ist $t := \sin^2 r$ und bezeichnen wir mit B_k die Verteilungs- und mit β_k die Dichtefunktion der $B(k/2, 1/2)$ - Verteilung, so kann man das Ergebnis auch anschreiben als:

$$E(\#\{Ecken\}_{n,d}) = \binom{n}{d} \cdot \int_0^1 \Big(1 - \frac{1}{2} B_{d-1}(t)\Big) \cdot \beta_{d^2+2d-1}(t) \, dt$$

Für d = 3 gibt es ein exaktes Resultat:

$$E(\#\{Ecken\}_{n,3}) = 2n - 4 - (n + 1) \cdot (n - 2)/2^{n-1}$$

Für größere Dimensionen ist auch hier eine Abschätzung interessanter als die genaue Formel. In [45] findet man mit Konstanten $c_1 > 0$ und $c_2 > 0$:

$$c_1^d \cdot d^{(d-6)/2} \leq E(\#\{Ecken\}_{n,d}) \leq c_2^d \cdot d^{(d-5)/2} \cdot n \tag{3.18}$$

In [14] befindet sich die genaue asymptotische Aussage:

$$E(\#\{Ecken\}_{n,d}) \sim \frac{2}{d} \cdot \gamma_{(d-1)^2} \cdot \gamma_{d-1}^{-(d-1)} \cdot n, \tag{3.19}$$

Dabei ist $\gamma_n := \Gamma(n)/(2^n \cdot \Gamma^2(n/2))$ für $n \in \mathbb{N}$.

3.4 Approximierbarkeit konvexer Körper

In III.2 bewiesen wir, daß es zu jedem konvexen Körper K ein Polyeder mit beliebig kleinem Hausdorffabstand gibt. Nichts hingegen wurde ausgesagt über die Struktur des Polyeders. Klarerweise wird die Approximation des konvexen Körpers K durch das bestapproximierende Polyeder P_n mit n Flächen (oder n Ecken) für wachsendes n immer besser, da dann der Hausdorffabstand für wachsendes n nach Null strebt.

Die Approximation erfolgt dabei mit Größenordnung $\frac{1}{n}$, das heißt, daß sich $n \cdot \eta(K, P_n)$ einem Grenzwert $1/A$ nähert.

Dieses A wollen wir die *Approximierbarkeit* von K nennen. Dieser Begriff wurde von Fejes-Tóth in [30] eingeführt, und von R.Schneider in [73] umfassend behandelt. Er erhält dabei den folgenden Satz:

Es sei F eine geschlossene konvexe Hyperfläche der Differentiationsklasse C^3 (dh. F ist der Rand eines kompakten konvexen Körpers und ist mindestens dreimal stetig differenzierbar). κ bezeichne die (positive) Gauß'sche Krümmung der Fläche F, dF sei ihr Oberflächenelement in der zweiten Grundform.

Für $\epsilon > 0$ sei $m(F, \epsilon)$ die kleinste natürliche Zahl mit der Eigenschaft, daß es ein der Fläche F eingeschriebenes konvexes Polytop P mit m Ecken gibt, für das $\eta(F, \partial P) \leq \epsilon$ ist.

Ist ferner ϑ_d die Dichte der dünnsten Überdeckung des d-dimensionalen Raumes durch Einheitskugeln, so gilt :

$$\lim_{\epsilon \to 0^+} m(F, \epsilon) \cdot \epsilon^{\frac{d-1}{2}} = 2^{-\frac{d-1}{2}} \cdot \frac{\vartheta_{d-1}}{\kappa_{d-1}} \cdot \int_F \sqrt{\kappa} dF \tag{3.20}$$

Der exakte Wert von ϑ_2 ist bekannt: $\vartheta_2 = 2\pi/\sqrt{27}$ [72]. Daher können wir für d = 3 schreiben:

$$\frac{1}{A} = \lim_{m \to \infty} m \cdot \eta(F, \partial P) = \frac{1}{\sqrt{27}} \cdot \int_F \sqrt{\kappa} dF \tag{3.21}$$

Der Satz besagt, daß man die Approximierbarkeit eines konvexen Körpers allein aus seiner Gauß'schen Krümmung berechnen kann. Weiters folgt daraus, daß unter allen konvexen Körpern die Kugel am schlechtesten approximierbar ist.

Der Beweis des Satzes bedarf vieler technischer Hilfsmittel. Seine Grundidee ist die, die Fläche durch sogenannte II-geodätische Kreise, das sind Kreise in der durch die zweite Fundamentalform induzierten Metrik, zu überdecken. Bekanntlich läßt sich die Gauß'sche Krümmung berechnen durch:

$$\kappa = \frac{b_{\mathbf{uu}} \cdot b_{\mathbf{vv}} - b_{\mathbf{uv}}^2}{g_{\mathbf{uu}} \cdot g_{\mathbf{vv}} - g_{\mathbf{uv}}^2} = \frac{b}{g}$$

Die auftretenden Koeffizienten sind dabei die Koeffizienten der ersten Grundform $[g_*]$ sowie die der zweiten Grundform $[b_*]$.

Ist $F = F(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ eine Parameterdarstellung der Fläche F, so lassen sich diese Koeffizienten errechnen aus :

$$g_{\mathbf{uu}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}; b_{\mathbf{uu}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{u}})$$

$$g_{\mathbf{uv}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}; b_{\mathbf{uv}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{v}})$$

$$g_{\mathbf{vv}} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}; b_{\mathbf{vv}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \det(\frac{\partial F}{\partial \mathbf{u}}, \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}, \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{v} \partial \mathbf{v}})$$

Ist C eine Kurve in F, so ist ihre II-Länge gegeben durch das Integral: $L_{II}(C) = \int_0^1 \sqrt{b_{\mathbf{uu}} d\mathbf{u} d\mathbf{u} + b_{\mathbf{uv}} d\mathbf{u} d\mathbf{v} + b_{\mathbf{vv}} d\mathbf{v} d\mathbf{v}} dt$ geeignet parametrisiet: $C = (\mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t))$.,
Sind zwei Punkte $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ auf F gegeben, so definieren mit uns die II-Metrik δ als das Infimum über die II-Länge aller Kurven C, die $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ verbinden. Damit können wir eine II-Kugel um $\mathbf{x}$ mit Radius ρ definieren durch $\{\mathbf{y} \in F : \delta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \rho\}$.
Bezeichnet man mit $k(F, \rho)$ die kleinste natürliche Zahl, die eine Überdeckung von F durch derartige Kreise zuläßt, so gilt für $0 < \lambda < 1$ und für genügend kleines $\epsilon > 0$: ([73], Hilfssatz 2).

$$k(F, \lambda^{-1} \cdot \sqrt{2\epsilon}) \leq m(F, \epsilon) \leq k(F, \lambda \cdot \sqrt{2\epsilon}) \tag{3.22}$$

Der Beweis der linken Ungleichung geht von der Fläche F und einem "passenden" Polytop aus. Man betrachtet dann die zu einer Tangentialebene parallele Ebene im Abstand ϵ und zeigt, daß der Punkt, an den die Ebene gelegt wurde, in einer II-Kugel mit Radius $\lambda \cdot \sqrt{2\epsilon}$ um einen Eckpunkt des Polytopes liegen muß.
In umgekehrter Richtung gibt man sich eine Überdeckung durch m II-Kugeln vor, bildet die konvexe Hülle der Mittelpunkte und zeigt auf indirekte Weise, daß dieses Polytop P einen genügend kleinen Abstand $\eta(F, \partial P)$ besitzt.

Der zentrale Beweisschritt des Satzes liegt in dem Lemma:
Ist A_{II} (M) das (d-1)-dimensionale Volumen einer offenen Teilmenge $M \subset F$ bezüglich der durch die zweite Grundform induzierten Metrik, und ist $A_{II} = A_{II}(F)$, so gilt [73,Hilfssatz 4]:

$$\lim_{\rho \to 0} k(F, \rho) \cdot \kappa_{d-1} \cdot \rho^{d-1} = \vartheta_{d-1} \cdot A_{II}.$$

Mit diesen Elementen kann der Beweis vervollständigt werden:
Zunächt bemerken wir, daß $A_{II} = \int_F \sqrt{b} dF = \int_F \sqrt{\kappa} \cdot sqrtg dF = \int_F \sqrt{\kappa} dF$.
Sodann gilt für $\lambda < 1$ die Gleichungskette (s. Lemma und Hilfssatz 2):

$$\lambda^{d-1} \cdot 2^{-(d-1)/2} \cdot \kappa_{d-1}^{-1} \cdot \vartheta_{d-1} \cdot A_{II} =$$

$$\lambda^{d-1} \cdot 2^{-(d-1)/2} \cdot \lim_{\rho \to 0} k(F, \rho) \cdot \rho^{d-1}$$

$$\leq \liminf_{\epsilon \to 0^+} m(F, \epsilon) \cdot \epsilon^{(d-1)/2} \leq \limsup_{\epsilon \to 0^+} m(F, \epsilon) \cdot \epsilon^{(d-1)/2}$$

$$\leq \lambda^{-(d-1)} \cdot 2^{-(d-1)/2} \cdot \lim_{\rho \to 0} k(F, \rho) \cdot \rho^{d-1} =$$

$$= \lambda^{-(d-1)} \cdot 2^{-(d-1)/2} \cdot \kappa_{d-1}^{-1} \cdot \vartheta_{d-1} \cdot A_{II} =: K.$$

Aus $K \leq \underline{lim} \leq \overline{lim} \leq K$ und aus $A_{II} = \int_F \sqrt{\kappa} dF$ folgt für $\lambda \to 1$ die Behauptung des Satzes $\diamondsuit$

In [37] wird ein analoger Satz für die symmetrische Differenzmetrik bewiesen. Bis auf geänderte Konstante wird auch dort die Approximationsgeschwindigkeit von $n^{-2/(d-1)}$ erhalten.

3.5 Projektionskörper, Zonotope

Gegeben sind von einem konvexen Körper nur Maße seiner Projektionen. Was können wir über den Körper selbst aussagen ?

In [6] findet sich zu diesem Problem folgender Zugang:

Es sei K ein konvexer Körper und $O(K, \mathcal{H})$ sei die Oberfläche der orthogonalen Projektion des Körpers K auf die Hyperebene $\mathcal{H}$. Ist $\mathbf{u}$ der äußere Einheitsnormalvektor der Hyperebene $\mathcal{H}$ und liegt $\mathbf{u}$ in der Borelmenge der Einheitssphäre S^{d-1}, so läßt sich $O(K, \mathcal{H})$ ausdrücken durch:

$$O(K, \mathcal{H}) = \frac{1}{2} \cdot \int_{S^{d-1}} |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}| d\mu(\mathbf{x}). \tag{3.23}$$

Dabei ist mu der (d-1)-dimensionale Inhalt desjenigen Teiles vom Rand von K, der in der Stützebene $\mathcal{H}$ enthalten ist. Ist μ das Oberflächenmaß, so ist $O(K, \mathcal{H})$ gemäß (II.5) gleich $2\kappa_{d-1}$.

Haben wir weiters eine Familie $\mathcal{L} = (\mathcal{H}_1, \alpha_1; ...; \mathcal{H}_n, \alpha_n)$ von n Hyperebenen des $\mathbb{R}^d$ mit zugeordneten Gewichten α_i gegeben, so können wir die Oberfläche von $O(K)$ abschätzen durch die Summe

$$O(K, \mathcal{L}) = \sum \alpha_i \cdot O(K, \mathcal{H}_i) \tag{3.24}$$

Die Abschätzung wird klarerweise umso besser, je "gleichmäßiger" die Einheitsnormalvektoren der Hyperebenen als Vektoren auf der S^{d-1} verteilt sind. Daraus resultiert die Frage, wie sich für eine gute Wahl der Einheitsvektoren der Quotient $O(K, \mathcal{L})/O(K)$ verhält.

Da jede Hyperebene zwei Normalvektoren $\pm\mathbf{u}_i$ besitzt, können wir $O(K, \mathcal{L})$ darstellen durch:

$$O(K, \mathcal{L}) = \sum \alpha_i O(K, \mathcal{H}_i) = \frac{1}{2} \cdot \int_{S^{d-1}} (\sum \alpha_i |\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}|) d\omega(\mathbf{x}) \tag{3.25}$$

Hier steht unter dem Integral die Stützfunktion eines Zonotops:

$$h(Z(\mathcal{L}), \mathbf{x}) = \sum \alpha_i \cdot |\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{x}| \tag{3.26}$$

Ein *Zonotop* ist die Minkowski-Summe von endlich vielen Strecken mit inneren Punkten [32,61]. Betrachtet man die Minkowski-Summe (III.1) genauer, so erkennt man, daß man jedes Zonotop des $\mathbb{R}^d$, das von n Strecken aufgespannt wird, als Projektion eines n-dimensionalen Parallelotops auf den

$\mathbb{R}^d$ auffassen kann. Umgekehrt kann man jedes Zonotop in $\binom{n}{d}$ Parallelotope zerlegen. [32].
Weiters ist es klar, daß man o.B.d.A. annehmen kann, daß die erzeugenden Linienelemente alle ihren Mittelpunkt im Ursprung haben. Diese erzeugenden Linienelemente bilden den *Generator* [gen Z] des Zonotopes.
[Im obenstehenden Zonotop ist der Generator gleich der Menge der gewichteten Einheitsnormalvektoren, die wir hier als Strecken auffassen.]
Ist $genZ = \{\mathbf{x}_1, .., \mathbf{x}_n\}$ mit $\mathbf{x}_i^1 = (x_i^d, .., x_i^d) \in \mathbb{R}^d$ der Generator von Z, und bezeichnet $[\mathbf{x}_i] = conv\{-\mathbf{x}_i/2, \mathbf{x}_i/2\}$, so kann man das Zonotop Z darstellen als $Z = [\mathbf{x}_1] + ... + [\mathbf{x}_n]$.
Daher hat jeder Punkt des Zonotopes Z die Darstellung

$$P = \theta_1 \cdot \mathbf{x}_1/2 + ... + \theta_n \cdot \mathbf{x}_n/2 \text{ mit } |\theta_i| \leq 1 \text{ und } \mathbf{x}_i \in genZ$$

Für die Ecken gilt Gleichheit.
Analogerweise [32] besitzt jede Zonotopseite die Darstellung:

$$\mathcal{F} = [\mathbf{x}_{\sigma(1)}] + .. + [\mathbf{x}_{\sigma(r)}] + (\pm 1) \cdot \mathbf{x}_{\sigma(r+1)}/2 + .. + (\pm 1) \cdot \mathbf{x}_{\sigma(n)}/2,$$

und ist daher wiederum ein Zonotop. [Mit σ wurde eine Permutation von (1..n) bezeichnet].
Mit Hilfe dieser Darstellungsmöglichkeit der Seitenflächen kann man auch den Namen dieser Polytopklasse erklären. In der obigen Darstellung ist ja noch offen, wie das Vorzeichen von $\mathbf{x}_{\sigma(r+1)}$ bis $\mathbf{x}_{\sigma(n)}$ zu wählen ist. Dies geschieht folgendermaßen:

Ist $\mathbf{u}$ der äußere Normalvektor der Trägerhyperebene von $\mathcal{F}$, so ist das Vorzeichen von $\mathbf{x}_{\sigma(i)}$ so zu wählen, daß $\mathbf{x}_{\sigma(i)}$ und $\mathbf{u}$ auf derselben Seite der Trägerhyperebene liegen. Da die Normalvektoren der Seiten, die eine Verschiebung des Generatorelementes $\mathbf{x}_i$ enthalten, orthogonal auf $\mathbf{x}_i$ stehen, formen sie einen "Ring" um $\mathbf{x}_i$ und bilden eine "Zone" von Z.
Aus der Darstellung eines Punktes sieht man, daß die Stützfunktion eines Zonotopes die folgende Gestalt hat [32,74]:

$$h(Z, \mathbf{u}) = \sum \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u} \tag{3.27}$$

Denn eine Strecke $\pm\alpha \cdot \mathbf{u}$ mit $\mathbf{u} \in S^{d-1}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ besitzt die Stützfunktion $\alpha \cdot |\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}|$.
Es sei nun $Z(\mathcal{L})$ das Zonotop mit Stützfunktion h aus (4). Wir beachten, daß aufgrund ihrer Darstellung die Funktion $h(Z(\mathcal{L}), \cdot)$ an nur endlich vielen Stellen ihr Maximum annehmen kann. Diese Maximumsstellen weisen in Richtungen gewisser Zonotopecken.
Setzen wir $\dim Z(\mathcal{L}) = d$ voraus, so wird umgekehrt $h(Z(\mathcal{L}), \cdot)$ für Normalvektoren gewisser Zonotopseiten minimal. Daraus folgt, daß das Verhältnis $O(K, Z(\mathcal{L}))/O(K)$ stets kleiner als der Umkugelradius R und stets größer als der Inkugelradius r des Zonotopes $Z(\mathcal{L})$ ausfällt.

Diese Radien können wir durch die Hausdorffmetrik abschätzen: Der Hausdorffabstand η ist definiert als die kleinste Zahl, für die gilt: $K_\eta \subset L$ und $L_\eta \subset K$.
Daher ist die Kugel B^d_η mit Radius $(1 + \eta)$ eine Umkugel des Zonotopes $Z(\mathcal{L})$ und umgekehrt ist $B^d_{-\eta}$, eine Kugel, die den Radius $1 - \eta$ besitzt, eine Inkugel von $Z(\mathcal{L})$, da Z die Kugel B^d_η umfassen muß. Daher ist

$$R \leq \eta + 1 \quad \texttt{und} \quad r \geq 1 - \eta \tag{3.28}$$

Somit ist:

$$1 - \eta \leq r \leq O(K, Z(\mathcal{L}))/O(K) \leq R \leq 1 + \eta$$

und :

$$-\eta \leq O(K, Z(\mathcal{L}))/O(K) - 1 \leq +\eta$$

$$|1 - O(K, Z(\mathcal{L}))/O(K)| \leq \eta(B^d, Z(\mathcal{L})) \tag{3.29}$$

Damit haben wir:

$$|O(K) - O(K, Z(\mathcal{L}))| \leq O(K) \cdot \eta(B^d, Z(\mathcal{L})) \tag{3.30}$$

Um also das am Beginn des Paragraphen gestellte Problem lösen zu können, müssen wir die Approximation der Kugel durch Zonotope betrachen. Um dies besser notieren zu können, setzen wir :

$$\zeta(n, d) := \inf\{\eta(B^d, Z) : \text{Z ist ein d-dimensionales Zonotop mit n Generatorelementen}\ \}$$

Weiters benötigen wir noch folgende Definition [10]:
Es sei P ein Polytop und $h(\mathbf{u})$ sei stets gleich dem Inhalt der orthogonalen Projektion von P auf eine Hyperebene mit Normalvektor $\mathbf{u}$. Dann heißt das Polytop $\Pi(P)$, das h als Stützfunktion besitzt, *Projektionskörper*.
Eine erste Untersuchung des Problemes stammt von Betke und McMullen [6]. Sie erhalten für die Zahl ζ die Abschätzung

$$c_1 \cdot n^{-2} \leq \zeta(n, d) \leq c_2 \cdot n^{-2/(d-1)} \tag{3.31}$$

Ihr Beweis stützt sich auf die grundlegenden Approximationssätze des zweiten Paragraphen und benützt folgende Tatsache:
Für $\nu = 2/(R + r)$ ist $\eta(B^d, Z_\nu) = (R - r)/(R + r) = (1 - r/R)/(1 - r/R)$.
Die Autoren betrachten ein d-dimensionales und n-eckiges Polytop, das von der Kugel den Hausdorffabstand $\gamma_d \cdot n^{-2/(d-1)}$ hat und dessen Existenz laut III.2 gesichert ist. Sie beweisen, daß der Projektionskörper des dualen Polytopes, der stets ein Zonotop ist [6], $\zeta(n, d) \leq (d - 1) \cdot \gamma_d \cdot n^{-2/(d-1)}$ besitzt.
Um eine Ungleichung in der anderen Richtung zu erhalten, schätzen sie die Radien r und R ab.
Wir wollen als nächstes untersuchen, wie "nahe" - in verschiedener Hinsicht

- ein Zonotop der Kugel kommen kann. Auf die ursprüngliche Fragestellung werden wir dann wir im sechsten Paragraphen zurückkommen.

Als erstes sei die Frage gestellt, welches Zonotop die kleinste mittlere Breite besitzt. Zur Vereinfachung setzen wir voraus, daß alle Generatorelemente gleich lang sind. [So ein Zonotop heißt üblicherweise "gleichseitig".]
Die mittlere Breite eines konvexen Körpers können wir (III.1) als "Erwartungswert der Breite" bezeichnen. Bei Zonotopen ist er bis auf einen konstanten Faktor gleich der Summe der Längen der erzeugenden Strecken.
Es scheint natürlich zu sein, diejenigen Zonotope, die eine kleinstmögliche Varianz der Breite besitzen als regulärßu bezeichnen. Denn der Begriff der Regularität ist nicht analog zu der Definition von (I.2) definierbar, denn es sonst wäre für $d = 3$ der Würfel das einzige reguläre Zonotop.
Diese Definition von "regulär" stammt aus [54]. Der Autor beweist, daß dann unter einem "regulären" Zonotop ein Zonotop mit gleich langen Generatorelementen $\mathbf{x}_i$ zu verstehen ist, bei dem der Generator einen "eutaktischen Stern" bildet, und bei dem die Geraden durch den Ursprung mit Richtungsvektoren $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ für alle $\mathbf{x}_i$ und $\mathbf{x}_j$ aus dem Generator denselben Winkel einschließen.
Eine Menge $\{\mathbf{x}_i, .., \mathbf{x}_n\}$ von Vektoren heißt *eutaktischer Stern*, wenn in einer (n x d)-Matrix X, deren i-te Zeile gleich $\mathbf{x}_i$ ist, die Spalten paarweise orthogonal sind und gleiche Norm haben.
Man kann jede orthogonale (n x d)-Matrix zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^n$ erweitern. Die Vektoren dieser Basis spannen dann einen Würfel auf. Da man eine orthogonale Projektion dadurch beschreiben kann, daß man (n-d) Richtungen einfach "wegläßt", sind die Zonotope, deren Generator einen eutaktischen Stern bildet, genau die Zonotope, die als orthogonale Projektion eines Würfels dargestellt werden können.

Als nächstes stellt sich die Frage nach Zonotopen mit maximalem Volumen. Dieses ist zum Beispiel dadurch berechenbar, daß Zonotope eine enge Beziehung zur äußeren Algebra haben.
Daraus kann man beweisen [32], daß das Volumen eines Zonotopes Z mit Generator $\{\mathbf{x}_1, .., \mathbf{x}_n\}$ sich anschreiben läßt als:

$$V_d(Z) = \sum |\det(\mathbf{x}_{i_1}, ..., \mathbf{x}_{i_d})| \tag{3.32}$$

Dabei ist $1 < i_1 < .. < i_d < n$; summiert wird über alle möglichen d-Tupel dieser Art.
In [32] wird weiters bewiesen, daß das größte Zonotop, das als Projektion eines n-dimensionalen Würfels auf den d-dimensionalen Teilraum, der durch die ersten d Koordinatenachsen aufgespannt wird, erhalten werden kann, zugleich das größte d-dimensionale Zonotop ist, für dessen Generator gen Z $= \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$ gilt : $\sum \| \mathbf{x}_i \|^2 = d$.

In [32] werden auch noch folgende Abschätzungen angegeben:

Erfüllt ein d-dimensionales Zonotop Z mit n-elementigem Generator die zuletzt genannte Eigenschaft, so ist:

$$V(Z) \leq \sqrt{\binom{n}{d}} \tag{3.33}$$

es gilt sogar:

$$V(Z) \leq \omega_d \cdot (\sqrt{n/d} \cdot \omega_{d-1}/\omega_d) \tag{3.34}$$

(Die erste Ungleichung läßt sich auch auf innere Volumina erweitern [52]; die zweite ist für $n > const \cdot d^2$ schärfer als die erste und von richtiger Größenordnung.)
Im dreidimensionalen Fall gilt für Zonotope, die aus Würfelprojektionen gewonnen werden die Ungleichung [33]:

$$V(Z) \leq \sqrt{\frac{n}{3}} \cdot \cot \frac{\pi}{2 \cdot (n-1)} \tag{3.35}$$

[Diese Abschätzung ist für $n < 15$ besser als die bisherigen.]
Für die Oberfläche und den Inkugelradius gilt im $\mathbb{R}^3$ [53]:
Sei n = 3,4 oder 6. Unter allen dreidimensionalen Zonotopen, die durch n Einheitsstrecken erzeugt werden, haben die, deren Seitenflächen kongruente Rhomben und deren Eckfiguren kongruente Polygone sind, größte Oberfläche und größten Inkugelradius.

3.6 Approximation durch Zonotope

In diesem Paragraphen wollen wir an das Problem des fünften Paragraphen anknüpfen.
Die Ungleichung (III.5.8) von Betke-McMullen benützt auf der linken Seite den Ausdruck:

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{u}) := |\frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} \|\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| d\omega(\mathbf{x}) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|| \tag{3.36}$$

Dieser Ausdruck bezeichnet den Fehler der Approximation des Cauchy'schen Oberflächenintegrales durch dessen korrespondierende Summe [55].
Die in diesem Ausdruck auftretende Summe ist gleich der $2\kappa_{d-1}/\omega_d$-fachen Stützfunktion des Zonotopes Z mit Generator $\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_n\}$, das Integral ist nach (II.5) gleich $2\kappa_{d-1}$.
Daher ist $\mathcal{F}_n(\mathbf{u}) = (\omega_d/2\kappa_{d-1}) \cdot |1 - h(\mathbf{u})|$ gleich einer Konstanten mal der Differenz von Kugelradius und Abstand des Zonotopes in Richtung $\mathbf{u}$. Aus (III.5) folgt [$\mathbf{u} \in S^{d-1}$]:

$$\eta(B^d, Z) = (\omega_d/2\kappa_{d-2}) \cdot \sup_{\mathbf{u}} \mathcal{F}(\mathbf{u}). \tag{3.37}$$

Die Funktion $f : S^{d-1} \to [-1,+1] : \mathbf{x} \to \mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$ kann als Orthogonalprojektion von S^{d-1} auf die Linie [-1,+1] betrachtet werden.
Diese Projektion soll so ”gestört” werden, daß das Maß einer beliebigen sphärischen Kappe

$$C_t := \{\mathbf{x} \in S^{d-1} : \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} \geq t\} = \{\mathbf{x} \in S^{d-1} : f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \geq t\}$$

mit Mittelpunkt $\mathbf{u}$ invariant bleibt.
Die Oberfläche ω von C_t ist [55] gegeben durch das Integral:

$$\omega(C_t) = \omega_{d-1} \cdot \int_{-1}^{+1} (1-\tau^2)^{(d-3)/2} d\tau, \text{ für d = 3 ist dies } \tfrac{1}{2} \cdot (1-t).$$

Es ist nun $g(t) := \omega^*(C_t) := \omega(C_t)/\omega_d$ eine streng fallende Funktion, die [-1,+1] auf [0,1] abbildet und die für $s > t$ stets die Gleichung $\omega^*(C_s \backslash C_t) = g(s) - g(t)$ erfüllt. Die Funktion $q := g \circ f_{\mathbf{u}}$ bildet S^{d-1} auf [0,1] ab und ist in folgendem Sinne maßtreu:
für jedes Intervall $I \subset [0,1]$ und für das Lebesguemaß λ gilt:

$$\omega(q^{-1}(I))/\omega_d = \omega^*(q^{-1}(I)) = \lambda(I). \tag{3.38}$$

Diese Maßtreue ist ersichtlich aus:

$$\omega^*(q^{-1}([t,s])) = \omega^*(f_{\mathbf{u}}^{-1}(g^{-1}([t,s]))) = \omega^*(f_{\mathbf{u}}^{-1}([g^{-1}(t), g^{-1}(s)]))$$

$$= \omega^*(C_{g^{-1}(t)} C_{g^{-1}(s)}) = g(g^{-1}(t)) - g(g^{-1}(s)) = s - t = \lambda([s,t]).$$

Wegen $g^{-1} \circ q = f$ impliziert die Maßtreue:

$$\int_{S^{d-1}} |f_{\mathbf{u}}(x)| d\omega^*(x) = \int_0^1 |g^{-1}(z)| d(q(z)) = \int_0^1 |g^{-1}(z)| dz.$$

Um dies einsehen zu können, benötigt man den Integraltransformationssatz der Maßtheorie:
Es seien $(\Omega_0, \mathcal{B}_0)$ *und* $(\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ *zwei Meßräume,* μ_0 *sei ein Maß auf* $(\Omega_0, \mathcal{B}_0)$, $g : (\Omega_0, \mathcal{B}_0) \to (\Omega_1, \mathcal{B}_1)$ *und* $f : (\Omega_1, \mathcal{B}_1) \to \mathbb{R}$ *seien zwei Funktionen. Dann ist:*

$$\int_{\Omega_0} f \circ g(t) dt = \int_{\Omega_0} f(g(t)) dt = \int_{\Omega_1} f(x) d(g(\mu_0)).$$

Das durch $\mu_1(A) := \mu_0(g^{-1}(A))\ \forall A \in \mathcal{B}$ definierte Maß nennt man *Bildmaß* von μ_0 unter der Abbildung g.
Setzen wir $z_i := q(\mathbf{x}_i)$, so ist: $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u} = f_{\mathbf{u}}(\mathbf{x}_i) = g^{-1}(z_i)$.
Aufgrund der Invarianzgleichung schreibt sich $\mathcal{F}_n(\mathbf{u})$ an als:

$$\mathcal{F}_n(\mathbf{u}) = |\frac{1}{\omega_d} \cdot \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}| d\omega(\mathbf{x}) - \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} |\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{u}|| =$$

$$|\int_0^1 |g^{-1}(z)|dz\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}|g^{-1}(z_i)||.$$

Das bedeutet, daß wir $\mathcal{F}_n(\mathbf{u})$ als den Fehler einer eindimensionalen numerischen Integration betrachten können, auf den wir die Ungleichung von Koksma (II.1) (*s.*[48]) anwenden.

Die totale Variation $V(f)$ einer stetigen und monotonen Funktion auf einem Intervall ist gleich der Differenz der Beträge der Intervallenden. In unserem Fall ist $V(g) = 2$ und wir erhalten aus der Ungleichung von Koksma [55]:

$$E_n(\mathbf{u}) \leq 2 \cdot D^*(z_1, .., z_n)$$

Also ist der Fehler kleiner gleich der zweifachen Sterndiskrepanz in Bezug auf Intervalle der Form [0,a] mit $0 \leq a \leq 1$. Da wir mit $t = g^{-1}(a)$ auch $q^{-1}([0, a]) = C_t$ und $a = \omega(C_t)$ haben, gilt mit $\mathcal{Z} := \{z_1, ..., z_n\}$ und $a \in [0, 1]$:

$$D^*(\mathcal{Z}) = \sup_a |\#(\mathcal{Z} \cap [0, a])/n - a| = \sup_a |\#(\mathcal{Z} \cap q^{-1}([0, a]))/n - a|$$

$$= \sup_{t\in[0,1]} |\#(\mathcal{Z} \cap C_t) - \omega(C_t)| == \sup_t |\#(z_i \in C_t) - \omega(C_t)|$$

Also können wir $\mathcal{F}_n(\mathbf{u})$ abschätzen durch die sphärische Kappendiskrepanz von (II.2). Wir brauchen nur das dortige Ergebnis zu übernehmen und erhalten so den Satz:

Für jede natürliche Zahl $n > 0$ gibt es eine Menge von Punkten $\{P_1, .., P_n\} \in S^{d-1}$, sodaß gilt:

$$\zeta(n, d) \leq c_d \cdot n^{1/2-1/(2d-2)} \cdot (\log n)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Die Beck'sche Methode kann man aber auch direkt auf unsere Aufgabenstellung anwenden [11]:

Für jede beliebige ganze Zahl n sei $\eta = n^{-1/(d-1)}$ Wir zerlegen analog zu (II.2) die S^{d-1} in n kompakte, zusammenhängende und paarweise disjunkte Mengen $\{Q_l\}_{l=1}^n$. Das Lebesguemaß von jeder dieser Mengen sei $\ll n$ und ihr Durchmesser sei $\leq const \cdot \eta$.

In jedem Q_l wählen wir zufällig und unabhängig voneinander d+2 Punkte aus. Dann hat für jede stetige Funktion f auf S^{d-1} bei geeignetem Maß μ_l auf Q_l der Ausdruck

$$h(\mathcal{P}, f) := \sum_{i=1}^{d+2} \lambda(Q_l) \cdot f(p_l) - \int_{Q_l} f d\mu_l$$

einen Betrag $\leq const \cdot \eta$.

Durch die Anwendung der Bernstein'schen Ungleichung und durch Einsetzen

der obigen Werte erhält man den Satz [11]:
Für $n \geq 3$ gibt es stets ein Zonotop und eine Konstante c_d mit:

$$\zeta(n,d) \leq c_d \cdot n^{-(d+2)/(2d-2)} \cdot \sqrt{\log n} \tag{3.40}$$

Die Güte der gefundenen Abschätzung bestätigt uns :
s gibt für $n \geq 3$ stets eine Konstante C_d und ein Zonotop mit:

$$\zeta(n,d) \geq C_d \cdot n^{-(d+2)/(2d-2)} \tag{3.41}$$

Zum Beweis (*s.*[12],[13]) verwenden wir ein positives und symmetrisches Maß ρ auf S^{d-1}. Das heißt, es ist für alle $\mathbf{x}$ auf der S^{d-1} : $\rho(\mathbf{x})$ größer Null und weiters ist $\int_{S^{d-1}} \mathbf{x} \cdot \rho(\mathbf{x})d\mathbf{x} = 0$.
Es ist dann $h(\mathbf{x}) := \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}|\rho(d\mathbf{y})$ die Stützfunktiom eines konvexen Körpers. Ist ρ ein diskretes Maß, so ist h die Stützfunktion eines Zonotopes. Die Funktion h läßt sich in der Theorie der sphärischen Fourieranalyse [67] darstellen als $\sum Y_k$. Die Funktion Y_k ist dabei eine sphärische harmonische Funktion von Ordnung k. Die Y_k's erfüllen folgende Orthogonalitätsrelation [67]:

$$\int_{S^{d-1}} Y_n(\mathbf{x}) \cdot Y_m(\mathbf{x}) d\omega(\mathbf{x}) = 0 \; für \, n \neq m.$$

Der Theorie der sphärischen harmonischen Analyse entnimmt man [12,13,67], daß man das Maß ρ formal anschreiben kann als:

$$\rho = \sum \lambda_k \cdot Y_k$$

Die λ_k's sind dabei geeignete Gewichte der Ordnung $O(k^{(d/2)+1})$.
Für $0 \leq r < 1$ setzen wir $\rho_r := \sum r^k \cdot \lambda_k \cdot Y_k$ [12]. Aufgrund der Orthogonalität der Y_k's gilt der Satz von Pythagoras und damit:

$$\sum \|Y_k - Y_k'\|_2^2 = \|h - h'\|_2^2$$

Es sei ρ' ein zweites Maß auf S^{d-1}, das dieselben Eigenschaften wir ρ besitzt. Analog zu oben bilden wir die zu ρ' zugehörigen Funktionen h',ρ_k' und Y_k' und können dann das Quadrat des L_2-Abstandes dieser beiden Maße abschätzen durch:

$$\| \rho_r - \rho_r' \|_2^2 =$$

$$= \int_{S^{d-1}} (\rho_r - \rho_r')^2 dd\omega = \int_{S^{d-1}} (\sum r^k \cdot \lambda_k \cdot Y_k - \sum r^k \cdot \lambda_k \cdot Y_k')^2 d\omega =$$

$$= \int_{S^{d-1}} [\sum r^k \cdot \lambda_k \cdot (Y_k - Y_k')] d\omega \leq \int_{S^{d-1}} \sum [r^k \cdot \lambda_k \cdot (Y_k - Y_k')] d\omega =$$

$$\leq \sum (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \int_{S^{d-1}} (Y_k - Y_k')^2 d\omega = \sum (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \| Y_k - Y_k' \|^2 \leq$$

$$\leq \sum \max_k (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \| Y_k - Y_k' \|^2 = \max_k (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \sum \| Y_k - Y_k' \|^2$$

$$= \max_k (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \parallel h - h' \parallel_2^2 .$$

Also ist:

$$\parallel \rho_r - \rho_r' \parallel \leq \max_k (r^k \cdot \lambda_k)^2 \cdot \parallel h - h' \parallel \tag{3.42}$$

Wegen $\lambda_k = O(k^{(d/2)+1})$ läßt sich das Maximum abschätzen durch:

$$\max_k (r^k \cdot \lambda_k) \leq C \cdot \max_k (r^k \cdot k^{d+2})$$

Die Funktion $r^k \cdot k^{d+2}$ hat ihr Maximum an der Stelle $\frac{d+2}{-\log r}$ wie man durch Differentiation und aus Monotonieüberlegungen ersieht. (Man beachte, daß für $r < 1$ der Logarithmus negativ, und damit der Ausdruck $-\log r$ positiv ist.) Es ist somit:

$$\max_k (r^k \cdot k^{d+2}) \leq$$

$$(r^{\frac{d+2}{-\log r}}) \cdot (\frac{d+2}{-\log r})^{d+2} = (r^{-\frac{1}{\log r}})^{(d+2)} \cdot (d+2)^{(d+2)} \cdot (\frac{1}{-\log r})^{d+2} =$$

$$= (e^{-\log r \cdot (1/\log r)})^{(d+2)} \cdot (d+2)^{(d+2)} \cdot (\frac{1}{-\log r})^{d+2} =$$

$$= (e^{-(d+2)} \cdot (d+2)^{(d+2)} \cdot (-\frac{1}{\log r})^{d+2} = C \cdot (-\frac{1}{\log r})^{d+2} \leq$$

$$\leq C \cdot \left(\frac{1}{1-r}\right)^{d+2}.$$

Da die Funktion $x - \log x$ auf [0,1] monoton fällt, ist $1 \leq r - \log r$ und damit:

$$(-1/\log r)^{d+2} \leq (1/1-r)^{d+2}.$$

Also haben wir:

$$\parallel \rho_r - \rho_r' \parallel \leq C_d \cdot (1-r)^{-(d+2)} \cdot \parallel h - h' \parallel \tag{3.43}$$

Es sei nun δ das durch $\mathcal{P} = \{P_1, .., P_n\}$ *induzierte Maß*. Es hat für $P \notin \mathcal{P}$ den Wert Null und für $P_i \in \mathcal{P}$ ist $\delta = \alpha$. Diese Werte α_i sind alle positiv und so gewählt, daß gilt: $\sum \alpha_i = 1$.

Für das induzierte Maß δ und das Oberflächenmaß ω kann man zeigen [12,13], *daß für* $(1-r)^{-1} \geq C \cdot n^{1/(d-1)}$ *mit einer Konstanten* C *gilt:*

$$\parallel \omega_r - \delta_r \parallel^2 > 1.$$

Damit können wir den Beweis von (3.41) vervollständigen. Denn es gilt [12,13]:

$$\zeta(n,d) = \inf_\eta \{\eta(B^d, Z)\} \geq$$

$$\parallel \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \omega(d\mathbf{y}) - \int_{S^{d-1}} |\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \delta(d\mathbf{y}) \parallel_2 = \parallel h_\omega - h_\delta \parallel_2 \geq$$

$$C_d \cdot (1-r)^{(d+2)/2} \cdot \parallel \omega_r - \delta_r \parallel \geq C_d \cdot (1-r)^{(d+2)/2} \cdot 1 \geq C_d \cdot C \cdot n^{\frac{d+2}{2(d-1)}} \diamondsuit$$

Literaturverzeichnis

[1] Alexander, J.R.
On the sums of distances between points on a sphere
Acta Math Acad Sci Hung 23 (1972) 443 - 448

[2] Beck, J.
Sums of Distances between Points on a Sphere - an Application of the Theory of Irregularities of Distribution to Discrete Geometry
Mathematika 31 (1984) no 1, 33 - 41

[3] Beck, J.; Chen, W.W.L.
Irregularities of Distribution
Cambridge, 1987

[4] Bezdek, K.; Conelly, R.; Kertész, G.
On the Average Number of Neighbors in a Spherical Packing : Intuitive Geometry, 1985

[5] Bezdek, A.; Bezdek, K.
On the Second Smallest Distance between Points on the Sphere
Geometriae dedicata 29 (1989) no 2, 141 - 152

[6] Betke, U.; McMullen, P.
Estimating the Sizes of Convex Bodies from Projektions
J London Math Soc (2) 27 (1983) no 3, 525 - 538

[7] Blümlinger, M.
Slice Discrepancy and Irregularities of Distribution on Spheres
Mathematika 38, nr. 1 (1991), 105 - 116

[8] Böröczky, K.
Packing of Spheres in Spaces of Constant Curvatures
Acta Math Acad Sci Hungar 32 (1978) no 3-4 , 243 - 269

[9] Böröczky, K.
The Problem of Tammes for n = 11
Studia Sci Math Hungar 18 (1983) no 2 - 4, 165 - 171

[10] Bourgain, J.; Lindenstrauß, J.
Projektion Bodies
Lecture Notes in Math 1317 (1986/87), 250 - 270

[11] Bourgain, J.; Lindenstrauß, J.
Distribution of Points on Spheres and Approximation by Zonotopes
Israel J Math 64 (1988) no 1, 25 - 31

[12] Bourgain, J.; Lindenstrauß, J.
Nouveau resultats sur les zonoïds et les corps de projection
Compte Rendus Acad Sci Paris Ser I Math 306 (1988) no 8, 377 - 380

[13] Bourgain, J.; Lindenstrauß, J.
Approximation of Zonoids by Zonotopes
Acta Math 162 (1989) no 1-2, 72 - 141

[14] Buchta, C.
Zufällige Polytope - eine Übersicht
in : Lecture Notes 1114 (1983), 1 - 13

[15] Buchta, C.; Müller, J.; Tichy, R.F.
Stochastic approximation of convex bodies
Math Ann 271 (1985) no 2, 225 - 235

[16] Chakerian, G.D.; Filliman, P.
The Measures of the Projektions of a Cube
Studia Sci Math Hung 21 (1986) no 1-2, 103 - 110

[17] Clare, B.W.; Kepert, D.L.
The Closest Packing of Equal Circles on a Sphere
Proc Roy Soc London Ser A 405 (1986) no 1829, 329 ff.

[18] Gruber, P.M. ; Wills, J.M. (Herausgeber)
Convexity and its Applications
Basel : Birkhäuser 1983

[19] Cover, T.M.; Efron, B.
Geometrical Probability and Random Points on a Hypersphere
Ann Math Stat 38 (1967), 213 - 220

[20] Coxeter, H.S.M.
Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Space
Acta Math Acad Sci Hungar 4 (1954), 263 - 274

[21] Coxeter, H.S.M.
Regular Polytopes
Dover Publication, New York, 1973

[22] Coxeter, H.S.M.
A Packing of 840 Balls of Radius $9°0'19''$ on the 3-Sphere
in : Intuitive Geometry, 1985

[23] Delsarte, P.; Goethals, J.M.; Seidel, J.J.
Spherical Codes and Designs
Geometriae dedicata 6 (1977) no 3, 363 - 388

[24] Danzer, L.
Finite Point Sets on S^2 with Minimum Distance as large as possible
Discrete Math 60 (1986), 3 - 66
(Habilschrift 1963, Göttingen)

[25] Erdös, P.; Hickerson, D.; Pack, J.
A Problem of Leo Moser about Repeated Distances on the Sphere
Amer Math Monthly 96 (1989) no 7, 569 - 575

[26] Fejes-Tóth,Gábor
Kreisüberdeckungen der Sphäre
Studia Sci Math Hungar 4 (1969), 225 - 247

[27] Fejes-Tóth,Gábor
Packungs- und Überdeckungsprobleme auf der Sphäre
in : 12-tes Steirisches Mathematik Symposium, Graz 1980

[28] Fejes-Tóth,Gábor
New Results of Packing and Covering
in : Convexity and its Applications, 1985

[29] Fejes-Tóth,Lászlo
Lagerungen in der Ebene auf der Kugel und im Raum
Grundlehren der Mathematischen Wissenschaft, Bd 65
Springer-Verlag, Berlin-New York, 1957, 1972

[30] Fejes-Tóth,Lászlo
Reguläre Figuren
Akademiai Kiado, Budapest, 1965

[31] Fejes-Tóth,Lászlo; Fejes-Tóth,Gábor
Dictatores on a Planet
Studia Sci Math Hungar 15 (1980), no 1 - 3, 313 - 316

[32] Filliman, P.
Extremum Properties for Zonotopes
Geometriae dedicata 27 (1988) no 3, 251 - 262

[33] Goethals, J.-M.; Seidel, J.-J.
Cubature formulae, Polytopes and Spherical Designs
in : The Geometric Vein; Springer 1981

[34] Goethals, J.-M.; Seidel, J.-J.
The Football
Nieuw Arch Wisk (3) 29 (1981/82) no 1, 50 - 58

[35] Groemer, H.
Über die Lagerung von Punkten auf der Kugel
Elemente der Mathematik 15 (1960), 133 - 134

[36] Groemer, H.
On the Average Size of Polytopes in a Convex Set
Geometriae dedicata 13 (1982) no 1, 37 - 62

[37] Gruber, P.M.
Approximation of Convex Bodies by Polytopes
Rendiconti Circolo Matematiko Palermo (2), 31 (1982) no 2, 195 - 225

[38] Gruber, P.M.
Approximation of Convex Bodies
in : Convexity and its Applications, 131 - 162

[39] Habicht, W.; v.d. Waerden, B.L.
Lagerungen von Punkten auf der Kugel
Math Ann 123 (1951), 223 - 234

[40] Hadwiger, H.
Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie
Berlin/Göttingen/Heidelberg : Springer 1957

[41] Hars, L.
The Tammes - Problem for n = 10
Studia Sci Math Hung 21 (1986) no 3-4, 439- 451

[42] Intuitiv Geometry (Siófok 1985)
Colloq Math Soc János Bolyai, 48
North-Holland-Company; Amsterdam-New York, 1985

[43] Kabatjanskijm, G.A.
Bounds for Packings on the Sphere and in Space
Problems of Information Transmission 14 (1978) no 1, 3 - 25

[44] Karabinta,A.; Székely, E.
Sur les Empilements Optimaux de Cercles Congruents sur la Sphère.
Ann. Univ. Budapest. Sect Math 16 (1973), 143 - 154

[45] Kelly, D.G.; Tolle, J.W.
Expected Number of Vertices of a Random Convex Polyhedron
SIAM J Algebraic Discrete Methods 2 (1981) no 4, 441 - 451

[46] Kesten, H.
Symmetric Random Walks on Groups
Transactions of the Amer. Math. Soc. 92 (1959), 336 - 354

[47] Kottwitz, D.A.
The Densest Packing of Equal Circles on a Sphere
Acta Cryst. A47 (1991) 158 - 165

[48] Kuipers, L.; Niederreiter, H.
Uniform Distribution of Sequences
Wiley & Sons, New York, 1974

[49] Leech, J.
Equilibrium of Sets of Particles on a Sphere
Math. Gaz. 41 (1957), 81 - 90

[50] Leech, J.
Arrangements of 22 Circles on a Sphere
Ann Univ Budapest Eötvös, Sect Math 31 (1988) pp 27 - 37 (1989)

[51] Leichtweiß, K.
Konvexe Mengen
Hochschultext zur Mathematik, Springer, 1980

[52] Linhart, J.
An Upper Bound for Equilateral Zonotopes
in : Intuitive Geometry

[53] Linhart, J.
Extremaleigenschaften der Regulären 3-Zonotope
Studia Sci Math Hung 21 (1986) no 1-2, 181 - 188

[54] Linhart, J.
Über die Varianz der Breite von Zonotopen
Beiträge Algebra Geom 27 (1988), 55 - 62

[55] Linhart, J.
Approximation of a Ball using Zonotopes
Arch Math (Basel) 53 (1989) no 1, 82 - 86

[56] Linhart, J.; Österreicher, F.
Gleichmäßige Verteilung von Punkten in gewissen metrischen Räumen, speziell auf der Kugel
Monatshefte der Mathematik 89 (1980), 111 - 120

[57] Lubotzsky, A.; Phillips, R.; Sarnak, P.
Hecke Operators and Distributing Points on a Sphere I
Comm. on Pure and Appl. Math., Vol XXXIX, (1986), nr Supplement, S. 149 - 186

[58] Lubotzsky, A.; Phillips, R.; Sarnak, P.
Hecke Operators and Distributing Points on S^2 II
Comm. on Pure and Appl. Math., Vol XXXX, nr 4 (1987), 401 - 420

[59] Mackay, A.L.; Finney, J.L.; Gotoh, K.
The Closest Packing of Equal Spheres on a Spherical Surface
Acta Cryst. A33, (1977), 98 - 100

[60] Mackay, A.L.
The Packing of Three Dimensional Spheres on the Surface of a Four-Dimensional Hypersphere
J Phys 13 (1980) no 11, 3373 - 3379

[61] Martini, Horst
Some Results and Problems around Zonotops
in : Intuitive Geometry, 1985

[62] Melnyk, T.W.; Knop, O.; Smith, W.R.
Extremal Arrangements of Points and Unit Charges on a Sphere: Equilibrium Configurations Revisited
Canadian Journal of Chemistry 55 (1977), 1745 - 1761

[63] Meschkowski, H.
Ungelöste und unlösbare Probleme der Geometrie
Braunschweig, Bibliographisches Institut, 1960

[64] Miles, R.E.
Isotropic Random Simplizes
Adv. Appl. Prob 3, (1971), 353 - 382

[65] Molnár, J.
Kreislagerungen auf einer Kugel
Mat Lapok 4 (1953), 113 - 123

[66] Molnár, J.
Sur les Empilements Optimaux des Sphères dans une Sphère de l'Espace à courbure costante à n Dimensions
Ann Univ Sci Budapest 18 (1974), 87 - 99

[67] Müller, C.
Spherical Harmonics
Lecture Notes in Mathematics, 17; Springer, 1967

[68] Neumaier, A.
Discrete Measures for Spherical Design
Nederl Akad Wetensch Indeg Math 50 (1988) no 3, 321 - 334

[69] Neutsch, W.
Optimal Spherical Designs and Numerical Integration on the Sphere
J Comput Phys 51 (1983) no 2, 313 - 325

[70] Robinson, R.M.
Arrangement of 24 Circles on a Sphere
Math Ann 144 (1961), 17 - 48

[71] Robinson, R.M.
Finite Sets of Points on a Sphere with Each Nearest to Five Others
Math Ann 179 (1969), 296 - 318

[72] Rogers, C.A.
Packing and Covering
Cambridge University Press 1964

[73] Schneider, R.
Zur optimalen Approximation konvexer Hyperflächen durch Polyeder
Math Ann 256 (1981), 289 - 301

[74] Schneider, R.; Weil, W.
Zonoids and related topics
in : Convexity and its Applications

[75] Schütte, K.
Überdeckung der Kugel mit höchstens acht Kreisen
Math Ann 129 (1955), 181 - 186

[76] Schütte, K.; v.d. Waerden, B.L.
Auf welcher Kugel haben 5,6,7,8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand Eins Platz ?
Math. Ann. 123 (1951), 96 - 124

[77] Seymour, P.D.; Zaslavsky, T.
Averaging Sets
Adv. of Math. 52 (1984), 213 - 240

[78] Stolarsky, K.B.
Sums of distances between points on a sphere II
Proc Amer Math Soc 41 (1973), 572 - 582

[79] Stolarsky, K.B.
An extremal Characterisation of regular Simplizes via Gegenbauer Polynomials.
Geometriae dedicata 5 (1976) no 2, 229 - 238

[80] Strohmajer, J.
Über die Verteilung von Punkten auf der Kugel
Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math 6 (1963), 49 - 53

[81] Szabó, J.; Roller, B.
Anwendung der Matrizenrechnung auf Stabwerke
Akademiai Kiado, Budapest, 1978

[82] Székely, E.
Sur le problème de Tammes
Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math 17 (1974) pp 157 - 175

[83] Tammes, R.M.L.
On the Origin Number and Arrangement of the Places of Exits on the Surface of Pollengrains.
Rec.Trv.Bot.Neerl. 27 (1930), 1 - 84

[84] Tarnai, T.
Note on the Packing of 19 Equal Circles on a Sphere
Elem Math 22 (1967) 108 - 110
Elem Math 39 (1984) no 2, 25 - 27

[85] Tarnai, T.
Packing of 180 Equal Circles on a Sphere
Elem Math 38 (1983), no 5, 199 - 122

[86] Tarnai, T.
Multisymmetric Packing of Equal Circles on a Sphere
Ann Univ Sci Budapest Eötvös Sect Math 27 (1984), pp 199 - 204

[87] Tarnai, T.
Spherical Circle-Packing in Nature, Practise and Theory
Structural Topology 1984 no 9 , 39 - 58

[88] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Improved Packing of Equal Circles on a Sphere and Rigidity of its Graph
Math Proc Cambridge Philos Soc 93 (1983) no 2, 191 - 218

[89] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Rigidity of the Graphs of the Spherical Circle Packings
Z Angew Math Mech 63 (1983) no 5, T 333 - T 334

[90] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Covering the Sphere with Equal Non-Overlapping Circles
in : Intuitive Geometry , 1985

[91] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Covering the Sphere with 11 Equal Circles
Elem Math 41 (1986), no 2, 35 - 38

[92] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Multisymmetric Close Packings of Equal Spheres on the Spherical Surface
Acta Cryst Sect A 43 (1987) no 5, 612 - 616

[93] Tarnai, T.; Gáspár, Zs.
Covering a Sphere by Equal Circles and the Rigidity of its Graph
Math Proc Cambridge Phil Soc, Vol 110, no 1 (1991),pp 71 - 90

[94] v.d.Waerden, B.L.
Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze
Math Ann 125 (1952), 213 - 222

[95] v.d.Waerden, B.L.
Pollenkörner, Punktverteilungen auf der Kugel und Informationstheorie
Die Naturwissenschaft 48 (1961), 189 - 192

[96] Wagner, G.
On Means of Distances on the Surface of a Sphere
J Austral Math Soc Ser A 47 (1989) no 3, 466 - 482

[97] Wagner, G.
On the product of distances to a Point Set on a Sphere
Pacific J Math 144 (1990) no 2, 389 - 398

[98] Wagner, G.
On Averaging Sets
Monatshefte der Mathematik 111 (1991) no 1, 69 - 79

[99] Wagner, G.
On a New Method for Constructing Good Point Sets on Spheres
Preprint

[100] Wendel, J.G.
A Problem in Geometric Probability
Math Scand 11, (1962), 109 - 111

[101] Whyte, L.L.
Unique Arrangement of Points on a Sphere
Amer Math Monthly 59 (1952), 606 - 611

[102] Zhou, J.N.
An Inequality Involving the Distances between Points on a Sphere
Kexue Tongbao 33 (1988) no 14, 1045 - 1047

[103] Zhou, J.N.
An Inequality of Distances between Points on a Hypersphere
Chinese Sci Bull 34 (1989) no 18, 1514 - 1518

[104] Zhou, J.N.
An Inequality of Distances between Points on a Hypersphere
J of Math Research Exposition, 10 (1990), no 1, 65 - 68