

I FLÄCHE UND ECKENSINUS EINES SPHÄRISCHEN DREIECKS

(1) Die konvexe Hülle P von n Punkten auf der Einheitskugel ist ein konvexes, n -eckiges Polyeder, dessen Radialprojektion auf die Kugeloberfläche ein Mosaik ergibt. Dieses Mosaik können wir uns als Dreiecksmosaik vorstellen; eventuell auftretende Nicht-Dreiecksflächen zerlegen wir durch einander nicht kreuzende Diagonalen in Dreiecke.

Das Volumen von P kann nur dann maximal werden, wenn nicht alle Eckpunkte von P auf einer offenen Halbsphäre liegen, denn sonst suchen wir den Punkt A von P , der dem Kugelmittelpunkt O am nächsten liegt und verbinden diesen mit O . Die zu OA senkrechte Ebene durch A ist dann eine Stützebene von P und definiert einen offenen Halbraum, der P enthält. Dieser Halbraum schneidet aus der Kugel ein Segment aus, in dem sich P befindet, und das in einer Halbkugel enthalten ist. Somit können wir das Segment und das darin enthaltene Polyeder P vollständig in das Innere der Kugel schieben. Ersetzen wir dann sukzessive die Eckpunkte von P durch ihre Radialprojektion auf die Kugelfläche, so vergrößert sich das Volumen des Polyeders; daher konnte die ursprüngliche Anordnung der Punkte nicht optimal gewesen sein. Aus dieser Überlegung folgt, daß der Inhalt jeder Fläche des Mosaiks $< 2\pi$ sein muß. (Im folgenden unterscheiden wir meist jedoch nicht zwischen Flächen des Mosaiks und deren Inhalt.)

Aus dem Euler'schen Polyedersatz: "die Anzahl der Ecken plus die Anzahl der Flächen minus die Anzahl der Kanten ergibt stets zwei" folgt, daß jedes n -eckige Dreieckspolyeder $2n-4$ Flächen und $3n-6$ Kanten besitzt, denn bei einem Dreieckspolyeder ist die dreifache Anzahl der Flächen gleich der doppelten Anzahl der Kanten. Die Summe der sphärischen Flächen des Mosaiks ergibt die Kugeloberfläche, d.h. sie beträgt 4π . Somit können wir die konvexe Hülle P der Punkte auf der Kugeloberfläche in $2n-4$ Pyramiden mit gemeinsamer Spitze im Kugelmittelpunkt O zerlegen; dabei ist jede Seite von P Basisfläche einer Pyramide. Das Volumen von P ist somit gleich der Summe der Volumina dieser Pyramiden.

(2) Ist ABC ein sphärisches Dreieck, und ist O der Mittelpunkt der Einheitskugel, so ist die konvexe Hülle von O, A, B, C ein Tetraeder OABC. Unter dem *Volumen eines Dreiecks* ABC wollen wir im weiteren stets das Volumen des Tetraeders OABC verstehen. Das 6-fache Volumen des Tetraeders OABC wird seit K.v.Staudt (1842) als der *Eckensinus* S des sphärischen Dreiecks bezeichnet [43, §73] und ist gleich der positiven Determinante der Ortsvektoren OA, OB, OC:

$$S = |\text{OA}, \text{OB}, \text{OC}|$$

Für das sphärische Dreieck verwenden wir im weiteren die übliche Bezeichnung: a sei die Kante zwischen C und B, b die Kante zwischen A und C, c die Kante zwischen B und A. Der Winkel bei A sei α , der bei B sei β und der bei C sei γ ; h_c sei die Länge der Höhe von C auf die Seite $c = AB$. Dabei verstehen wir unter der Höhe von C auf AB das kleinere Lot von C auf den Großkreis, der durch A und B gegeben ist. Da A, B, C Punkte der Einheitskugel sind, ist:

$$\cos a = \text{OB} \cdot \text{OC}, \cos b = \text{OC} \cdot \text{OA} \text{ und } \cos c = \text{OA} \cdot \text{OB}.$$

Nun ist das Quadrat von $|\text{OA}, \text{OB}, \text{OC}|$ gleich der Gram'schen Determinante von OA, OB und OC:

$$\begin{vmatrix} \text{OA} \cdot \text{OA} & \text{OA} \cdot \text{OB} & \text{OA} \cdot \text{OC} \\ \text{OA} \cdot \text{OB} & \text{OB} \cdot \text{OB} & \text{OB} \cdot \text{OC} \\ \text{OA} \cdot \text{OC} & \text{OB} \cdot \text{OC} & \text{OC} \cdot \text{OC} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos c & \cos b \\ \cos c & 1 & \cos a \\ \cos b & \cos a & 1 \end{vmatrix}$$

woraus

$$S = \sqrt{1 - (\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c) + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}$$

folgt. Setzen wir $s = (a+b+c)/2$, so läßt sich dieser Ausdruck umformen zu:

$$S = 2 \cdot \sqrt{\sin s \cdot \sin (s - a) \cdot \sin (s - b) \cdot \sin (s - c)} .$$

Um weitere Formeln für den Eckensinus des Dreiecks zu erhalten, beachten wir, daß sich A, B, C auf der Einheitskugel befinden. Daher ist $|\text{OA} \times \text{OB}| = |\text{OA}| \cdot |\text{OB}| \cdot \sin c = \sin c$, und $q = (\text{OA} \times \text{OB})$ ist orthogonal zu OA und zu OB. Ist $\text{OQ} = q/|q|$ der Ortsvektor von Q, so ist Q ein Pol des Großkreises Γ , der A und B enthält. Da wir $|\text{OA}, \text{OB}, \text{OC}| > 0$ voraussetzen, befinden sich C und Q auf derselben Seite von Γ .

Ist $Q \neq C$, so sei F der näher bei C gelegene Schnittpunkt des Großkreises durch Q und C mit Γ . Dieser Punkt F ist also der Fußpunkt der Höhe von C auf die Seite $c = AB$, und der von OC und OF eingeschlossene Winkel beträgt daher h_c . Die Vektoren OF und OQ sind zueinander orthogonal, und daher ist der von OQ und OC eingeschlossene Winkel gegeben durch $\omega = \pi/2 - h_c$. Ist $Q = C$, so ist jeder Punkt von Γ Fußpunkt von C auf $c = AB$, und es ist dann $h_c = \pi/2$ bzw. $\omega = 0$.

Daraus folgt:

$$S = |\mathbf{OA}, \mathbf{OB}, \mathbf{OC}| = OC \cdot (\mathbf{OA} \times \mathbf{OB}) = |\mathbf{OC}| \cdot |\mathbf{OA} \times \mathbf{OB}| \cdot \cos \omega = \sin c \cdot \sin h_c.$$

Mit dem sphärischen Sinussatz, den wir auf das rechtwinkelige Dreieck ΔACF anwenden, folgt:

$$S = \sin b \cdot \sin c \cdot \sin \alpha.$$

Diese beiden Formeln lassen sich zyklisch vertauschen. (Zur Herleitung der Formeln s. [5],[43],[55]).

(3) Die (sphärische) Fläche ε eines sphärischen Dreiecks auf der Einheitskugel ist durch den Exzeß seiner Winkel gegeben, d.h.: $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma - \pi$. Sind bei einem sphärischen Dreieck zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel, z.B. a, b, γ , gegeben, so gilt (s. [43, §75]):

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \gamma}{\cot \frac{a}{2} \cdot \cot \frac{b}{2} + \cos \gamma}.$$

Insbesondere gilt bei einem rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten a und b :

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \tan \frac{a}{2} \cdot \tan \frac{b}{2}$$

Zum Beweis dieser Gleichungen bilden wir den Sinus und den Kosinus von $\varepsilon/2 = (\alpha + \beta + \gamma - \pi)/2$:

$$\sin \frac{\varepsilon}{2} = -\cos \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2} \quad \text{und} \quad \cos \frac{\varepsilon}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2}.$$

Dann zerlegen wir die rechten Gleichungsseiten in $\gamma/2$ und $(\alpha + \beta)/2$ und multiplizieren mit $\cos c/2$.

Mit den Delambre'schen (Gauß'schen) Formeln erhalten wir dann daraus:

$$\begin{aligned} \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2} &= \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \right) - \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} \right) = \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \sin \gamma, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} \cos \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{\varepsilon}{2} &= \cos \frac{c}{2} \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \cos \frac{c}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\alpha + \beta}{2} = \\ &= \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a+b}{2} \right) + \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \left(\cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2} \right) = \cos \frac{a}{2} \cdot \cos \frac{b}{2} + \sin \frac{a}{2} \cdot \sin \frac{b}{2} \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

Durch Division der beiden Gleichungen ergibt sich die gewünschte Formel \blacklozenge

(4) Wird bei einem sphärischen Dreieck ABC die Kante $c = AB$ fixiert und der Punkt C so bewegt, daß sich die Fläche des Dreiecks nicht ändert, so beschreibt c einen Kreisbogen, der durch die ursprüngliche Lage von C sowie durch die Gegenpunkte von A und B gegeben ist. Dieser

Kreisbogen ist der *Lexell'schen Kreis* des Dreiecks. Bewegt sich C auf dem Lexell'schen Kreis des Dreiecks, so wird die Höhe h von C auf die Kante c = AB größtmöglich, wenn AC = CB. Da der Eckensinus des Dreiecks durch $\sin c \cdot \sin h$ gegeben ist, wird in diesem Fall auch der Eckensinus des Dreiecks maximal, und daher gilt:

Lemma 1: *Von allen sphärischen Dreiecken mit gleicher Fläche ε und fester Seite $c=AB$ besitzt das gleichschenkelige den größten Eckensinus.*

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus den Aussagen zum Lexell'schen Kreis, die wir ohne Beweis aus [18] bzw. [43] übernehmen können ♦

Ist a die Länge des Schenkels eines gleichschenkeligen Dreiecks mit Winkel 2α an der Spitze und Basiswinkel β , so erhalten wir mit den Neper'schen Regeln für den Eckensinus des Dreiecks:

$$S = S(\alpha, \beta) = \sin^2 a \cdot \sin 2\alpha = (1 - \cos^2 a) \cdot \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cdot (1 - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta).$$

Diese Funktion ist für $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, $0 \leq \beta \leq \pi/2$ und $\alpha + \beta > \pi/2$ streng konkav, denn dann ist $S_{\beta\beta} < 0$ und man erhält nach einigem Rechnen (s.[17, S.249]) :

$$S_{\alpha\alpha} \cdot S_{\beta\beta} - S_{\alpha\beta}^2 = \frac{32 \cdot \cot^4 \alpha}{\sin^6 \beta} \cdot [1 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)]^2 > 0.$$

Es sei im weiteren $G = G(\alpha, \beta) = S(\alpha, \beta)/6$ stets das Volumen eines gleichschenkeligen Dreiecks mit Winkel 2α an der Spitze und Basiswinkel β . Wir können nun folgende Aussage beweisen:

Lemma 2 : *Unter allen gleichschenkeligen Dreiecken gleicher Fläche besitzt das gleichseitige den größten Eckensinus.*

Beweis: Der Eckensinus eines gleichschenkeligen Dreiecks mit Winkel 2α an der Spitze und Basiswinkel β ist durch $S = S(\alpha, \beta) = \sin(2\alpha) \cdot (1 - \cot^2 \alpha \cdot \cot^2 \beta)$ gegeben, seine Fläche beträgt $\varepsilon = 2 \cdot (\alpha + \beta) - \pi$; ist das Dreieck gleichseitig, so ist $2\alpha = \beta$.

Setzen wir $\alpha = \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\pi}{6} + x \equiv w + x$ und $\beta = 2 \cdot (\frac{\varepsilon}{6} + \frac{\pi}{6}) - x =: 2w - x$, so ist $2 \cdot (\alpha + \beta) = 6w$

bzw. $6w = \varepsilon + \pi$, und der Eckensinus des Dreiecks ist durch $V := S(w+x, 2w-x)$ gegeben.

Nun ist:

$$\frac{dV}{dx} = - \frac{2 \cdot \cos^2(3w)}{\sin^2(2w-x) \cdot \sin^2(w+x)} \cdot \frac{\sin(3x)}{\sin(2w-x)}$$

Da der Basiswinkel $\beta = 2w - x$ stets > 0 sein muß, kann dV/dx nur dann verschwinden, wenn $x = 0$. Setzen wir diesen Wert für x in die zweite Ableitung von V ein, so erhalten wir:

$$\left. \frac{d^2V}{dx^2} \right|_{x=0} = -\frac{3 \cdot (1 - 2 \cdot \cos(2w))^2}{2 \cdot \sin(2w)} \cdot \frac{1}{\sin^4 w} < 0,$$

wenn $\pi/6 < w < \pi/2$. Nun folgt $\pi/6 < w < \pi/2$ aus $0 < \varepsilon < 2\pi$ und $6w = \varepsilon + \pi$. Daher besitzt der Eckensinus des Dreiecks eine eindeutige Maximalstelle in $x = 0$, bzw. $2\alpha = 2w = \beta$ ♦

Bemerkung: Bei zwei flächengleichen gleichschenkeligen Dreiecken bilden wir die Differenz aus dem Winkel an der Spitze und dem Basiswinkel. Ist diese Differenz immer positiv oder immer negativ, so besitzt das Dreieck mit dem kleineren Betrag der Differenz den größeren Eckensinus. Dies folgt aus der obigen Formel V , denn es ist $dV/dx < 0$ für $x > 0$ und $dV/dx > 0$ für $x < 0$.

Beim gleichseitigen Dreieck ist $\beta = 2\alpha = (\varepsilon + \pi)/3$, und sein Volumen ist durch $U = U(\varepsilon)$ gegeben:

$$U(\varepsilon) = \frac{1}{12} \cdot \left(3 - \cot^2 \frac{\varepsilon + \pi}{6}\right) \cdot \cot \frac{\varepsilon + \pi}{6}.$$

Somit ist das Volumen eines sphärischen Dreiecks mit Fläche ε nie größer $U = U(\varepsilon)$.

Nun ist $U'(\varepsilon) = \frac{1}{24} \cdot (\cot^4 \frac{\varepsilon + \pi}{6} - 1)$. Da der Kotangens in $(0, \pi/2)$ streng monoton fällt, ist U' für $0 < \varepsilon < 2\pi$ streng monoton fallend. U ist daher in diesem Bereich streng konkav und erreicht sein Maximum $1/6$ bei $\varepsilon = \pi/2$. Für $0 < \varepsilon < \pi/2$ ist somit U streng monoton wachsend, und für $\pi/2 < \varepsilon < 2\pi$ ist U streng monoton fallend.

Lemma 3: Unter allen sphärischen Dreiecken mit Fläche ε und Winkel $\gamma = \angle ACB$ hat das gleichschenkelige, d.h. das Dreieck mit $AC = CB$, den größten Eckensinus.

Beweis: Mit $X = \cot \frac{a}{2}$, $Y = \cot \frac{b}{2}$ ist $\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\sin \gamma}{X \cdot Y + \cos \gamma}$ bzw. $X \cdot Y = \sin \gamma \cdot \cot \frac{\varepsilon}{2} - \cos \gamma$.

Setzen wir $\omega = X \cdot Y$, so ist ω für gegebenes ε und festes γ konstant.

Da $\sin a = \frac{2 \cdot \cot(a/2)}{1 + \cot^2(a/2)} = \frac{2 \cdot X}{1 + X^2}$, ist:

$$S = \sin a \cdot \sin b \cdot \sin \gamma = \frac{2X}{1 + X^2} \cdot \frac{2Y}{1 + Y^2} \cdot \sin \gamma = \frac{4\omega \cdot \sin \gamma}{(1 + \omega^2) + (X^2 + Y^2)}.$$

S wird also größtmöglich, wenn $X^2 + Y^2$ kleinstmöglich wird. Nun folgt aus der Ungleichung zwischen dem arithmetischen und geometrischen Mittel, daß $X^2 + Y^2 \geq 2 \cdot \sqrt{X^2 \cdot Y^2} = 2 \cdot \omega$. Dabei wird Gleichheit nur dann angenommen, wenn $X = Y$. Somit ist $X^2 + Y^2$ kleinstmöglich für $X = \sqrt{\omega} = Y$, und daraus folgt die Aussage des Lemmas ♦

(5) Eine Ecke P des Mosaiks nennen wir eine *Ecke vom Grad k*, wenn in P genau k Dreiecke des Mosaiks zusammentreffen. Unter dem Volumen einer Ecke P vom Grad k verstehen wir 1/6 der Eckensinussumme der Dreiecke mit gemeinsamen Eckpunkt P; die Fläche der Ecke vom Grad k ist die Flächensumme dieser Dreiecke. Zudem heißt eine Ecke P vom Grad k regulär, wenn sich in P k kongruente und gleichschenkelige Dreiecke treffen.

Proposition 1: *Das Volumen einer Ecke vom Grad k ist kleiner oder gleich dem Volumen einer flächengleichen regulären Ecke vom Grad k; Gleichheit kann nur für reguläre Ecken vom Grad k gelten.*

Beweis: Es sei P eine Ecke vom Grad k und Fläche ε . Wir ersetzen jedes nicht gleichschenkelige Dreieck mit Eckpunkt P durch ein flächengleiches gleichschenkeliges Dreieck mit demselben Winkel 2α bei P und vergrößern dadurch sein Volumen [Lemma 3]. Ist β der Basiswinkel des gleich-schenkeligen Dreiecks, so ist das Volumen des Dreiecks durch die in (α, β) streng konkave Funktion $G(\alpha, \beta)$ gegeben. Die Winkel bei P ergänzen sich auf 2π , d.h. es ist $\Sigma\alpha = \pi$, und $2 \cdot (\Sigma\beta + \Sigma\alpha) = \varepsilon + k \cdot \pi$. Ist ε fest, so ist also auch $\Sigma\beta$ konstant. Aus der Jensen'schen Ungleichung folgt die Behauptung ♦

Somit ist das Volumen einer Ecke vom Grad k und der Fläche ε kleiner oder gleich

$$P(k, \varepsilon) = k \cdot G\left(\frac{\pi}{k}, \frac{\varepsilon + (k-2) \cdot \pi}{2k}\right) = \frac{k}{6} \cdot \sin \frac{2\pi}{k} \cdot \left(1 - \cot^2 \frac{\pi}{k} \cdot \cot^2\left(\frac{\varepsilon + (k-2) \cdot \pi}{2k}\right)\right);$$

diese Funktion $P = P(k, \varepsilon)$ ist für festes k streng konkav in ε .

Um das Volumen V eines n-eckigen Polyeders nach oben abzuschätzen, bilden wir sein Mosaik und zerlegen eventuell auftretende Nicht-Dreiecksflächen in Dreiecke. Das Volumen eines sphärischen Dreiecks mit Fläche ε ist kleiner oder gleich $U(\varepsilon)$, die Funktion U ist streng konkav und die Summe der Dreiecksflächen beträgt 4π . Somit folgt aus der Jensen'schen Ungleichung:

$$V \leq (2n - 4) \cdot U\left(\frac{4\pi}{2n - 4}\right)$$

In dieser Ungleichung kann Gleichheit nur für die regulären Dreieckspolyeder gelten. Damit haben wir für $n = 4$, $n = 6$ sowie $n = 12$ das jeweilige optimale Polyeder gefunden. Diese sind: das reguläre Tetraeder, das reguläre Oktaeder, das reguläre Ikosaeder.

Ein Polyedermosaik mit einer Ecke vom Grad k und Fläche ε besitzt noch weitere $(2n-4-k)$ Dreiecke, deren Flächensumme $4\pi-\varepsilon$ beträgt. Somit ist sein Volumen stets kleiner oder gleich:

$$F_1 = F_1(\varepsilon) = P(k, \varepsilon) + (2n - 4 - k) \cdot U\left(\frac{4\pi - \varepsilon}{2n - 4 - k}\right).$$

Wegen der strengen Konkavität von P läßt sich diese Überlegung auf p zueinander nicht benachbarte Ecken vom Grad k übertragen. Ist dabei ε Flächensumme der Ecken vom Grad k , so ist dann das Volumen des Polyeders stets kleiner oder gleich:

$$F_2 = F_2(\varepsilon) = p \cdot P\left(k, \frac{\varepsilon}{p}\right) + (2n - 4 - p \cdot k) \cdot U\left(\frac{4\pi - \varepsilon}{2n - 4 - p \cdot k}\right).$$

Besitzt das Polyeder zueinander nicht benachbarte Ecken vom Grad k_1, \dots, k_g mit den entsprechenden Flächen $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g$, so ist analogerweise das Volumen des Polyeders kleiner oder gleich:

$$F_3 = F_3(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_g) = \sum_{i=1}^g P(k_i, \varepsilon_i) + (2n - 4 - \sum k_i) \cdot U\left(\frac{4\pi - \sum \varepsilon_i}{2n - 4 - \sum k_i}\right).$$

Dabei heißen zwei Ecken des Polyeders *benachbart*, wenn sie durch eine gemeinsame Kante verbunden sind. Die Funktionen P und U sind (bei festem n und festem k) streng konkav in ε , und daher sind auch F_1 , F_2 und F_3 als Summe streng konkaver Funktionen ebenfalls streng konkav; für F_3 beruht dies darauf, daß die gemischten partiellen Ableitungen verschwinden. Denn ist $f = f(x)$ streng konkav in x , so ist $F(x,y) := f(x)+f(y)$ streng konkav in (x,y) , denn für jedes (x,y) ist :

$$F_{xx} = f''(x) < 0 \text{ und } F_{xx} \cdot F_{yy} - F_{xy}^2 = f''(x) \cdot f''(y) > 0.$$

Daher gibt es für jedes n und für alle k bzw. k_1, \dots, k_g genau einen maximalen Wert der betreffenden Funktion, der sich numerisch bestimmen läßt. Ist dieser Maximalwert kleiner als das Volumen eines bekannten, der Kugel eingeschriebenen Polyeders, so kann das optimale Polyeder die entsprechende Struktur nicht enthalten.

(6) Für $k = 3$ und $n = 6, 7, 8$ erhalten wir:

n		6	7	8
max		1.26040	1.54915	1.79729
vol		1.33333	1.58510	1.81572

Dabei bezeichnet "max" den numerisch gefundenen Maximalwert von F_1 und "vol" das Volumen eines bereits bekannten Polyeders. Da der Wert von F_1 stets kleiner als das Volumen des bekannten Polyeders ist, kann das für $n = 6, 7, 8$ optimale Polyeder keine Ecke vom Grad 3 besitzen.

Für $n = 5, 6$ und 7 ist damit der topologische Typus des optimalen Polyeders eindeutig festgelegt: das optimale Polyeder kann nur vom Typus einer *Doppelpyramide* sein. Ihr Mosaik läßt sich in zwei Ecken vom Grad $(n-2)$ zerlegen. Für $n = 5$ ist die Doppelpyramide überhaupt das einzige Dreieckspolyeder; für $n = 6, 7$ ist die Doppelpyramide das einzige Dreieckspolyeder, das keine Ecke vom Grad 3 besitzt. Dies läßt sich in elementarer Weise leicht zeigen. Zur Erleichterung der Arbeit benutzen wir jedoch die von P.J.Federico [16] publizierte vollständige Liste aller 4- bis 8-eckigen Polyedertypen, oder die ebenfalls vollständige Liste aller einfachen Polyedertypen für $n = 5 - 10$ von M.Brückner [11]. (Zur Vollständigkeit der Listen s. [8] bzw. [15].)

Zur Liste von M. Brückner ist noch folgendes zu bemerken: Bekanntlich heißt ein konvexes Polyeder einfach, wenn sich in jeder Ecke genau drei Flächen treffen, und jedes einfache Polyeder ist das Dualpolyeder zu genau einem Dreieckspolyeder. Enthält dieses Dreieckspolyeder eine Ecke vom Grad k , so besitzt das dazu duale einfache Polyeder eine k -seitige Fläche; sind im Dreieckspolyeder zwei Ecken vom Grad p bzw. q zueinander benachbart, so gibt es im dazu dualen einfachen Polyeder eine p -seitige und eine q -seitige Fläche mit gemeinsamer Kante.

Da sich das Mosaik einer n -eckigen Doppelpyramide in zwei Ecken vom Grad $(n-2)$ zerlegen kläßt, ist ihr Volumen kleiner oder gleich dem Volumen einer n -eckigen Doppelpyramide, deren Mosaik aus zwei regulären kongruenten Ecken vom Grad $(n-2)$ besteht; dies folgt aus der Prop. 1 und der strengen Konkavität von P . Da wir die Kugeloberfläche mit zwei regulären und kongruenten Ecken vom Grad $(n-2)$ schlicht und lückenlos überdecken können, haben wir das optimale Polyeder vom Typ der Doppelpyramide gefunden; sein Volumen ist daher durch $(n-2)/3 \cdot \sin 2\pi/(n-2)$ gegeben. Damit haben wir auch die verwendeten Vergleichswerte für $n = 6, 7$ hergeleitet.

Ebenso wie diese Polyeder besitzt auch das für $n = 8$ optimale Polyeder keine Ecke vom Grad 3; und das maximale Volumen der 8-eckigen Doppelpyramide beträgt ≈ 1.7321 . Es gibt jedoch einen zweiten 8-eckigen Polyedertypen ohne Ecke vom Grad 3 (s. [16],[11]). Dieser besteht aus zweimal zwei benachbarten Ecken vom Grad 4, und das maximale Volumen eines Polyeders von diesem Typ beträgt ≈ 1.81572 , wie wir in Kapitel II beweisen werden.

(7) Um Aussagen über die Typen optimaler Polyeder machen zu können, betrachten wir im folgenden n -eckige Polyeder mit nicht benachbarten Ecken gegebenen Grades. In den verwendeten Tabellen sind in der oberen Zeile diese Eckengrade angegeben und in der unteren der maximale Wert der entsprechenden Funktion. Zum Vergleich verwenden wir das Volumen spezieller n -eckiger Polyeder; diese werden in Kapitel III bzw. IV näher betrachtet.

Für $n = 9$ erhalten wir:

		3	6/6	7	4/6
max		2.00894	2.00617	1.98826	2.04222

Da ein 9-eckiges Polyeder mit Volumen 2.04375 existiert, kann das für $n = 9$ optimale Polyeder weder eine Ecke vom Grad 3 noch eine Ecke vom Grad 7 besitzen; besitzt es eine Ecke vom Grad 4 und eine Ecke vom Grad 6, so müssen diese zueinander benachbart sein. Diese Bedingungen werden nur von den Polyedertypen Nr. 32 und Nr. 33 der Brückner'schen Liste erfüllt (s. Abb.1).

Abb. 1

Für $n = 10$ ist:

		3	6/6	7	8
max		2.18952	2.21098	2.19064	2.12312

Da es ein 10-eckiges Polyeder mit Volumen 2.21871 gibt [s.(III,1)], kann das für $n = 10$ optimale Polyeder keine Ecken vom Grad 3, 7 oder 8 besitzen, und wenn es zwei Ecken vom Grad 6 enthält, sind diese zueinander benachbart. Daher muß das für $n = 10$ optimale Polyeder vom Typus 83c, 84 oder 85 der Brückner'schen Liste sein (s.Abb. 2). Die Abbildungen 1 und 2 zeigen die Brückner'sche Liste der einfachen Polyedertypen für $n = 9$ und $n = 10$ ohne Berücksichtigung der Polyedertypen, die zumindest eine Dreiecksfläche besitzen (s. Abb 2).

Abb. 2

In Kapitel **IV** werden wir den Typus eines 11-eckigen Polyeders mit Volumen von ≈ 2.35463 kennenlernen. Im Vergleich dazu erhalten wir

		3	4/4/4/4	7/7	8
max		2.34436	2.35451	2.29153	2.30393

In analoger Weise lassen sich für das für $n = 11$ optimale Polyeder Ecken vom Grad größer acht ausschließen; das für $n = 11$ optimale Polyeder besitzt somit nur Ecken vom Grad 4, 5, 6 oder 7.

Ebenso wird in Kapitel **IV** ein 13-eckiges Polyeder mit Volumen von ≈ 2.61283 angegeben. Dazu können wir vergleichen:

		3	4/4/4	4/4/6	7/7	8
max		2.59443	2.60668	2.61184	2.57975	2.58037

Somit enthält das für $n = 13$ optimale Polyeder keine Ecken vom Grad 3 und 8, und in ähnlicher Weise lassen sich Ecken von höherem Grad ausschließen; weiters enthält das für $n = 13$ optimale Polyeder höchstens zwei nicht benachbarte Ecken vom Grad 4.

Für $n = 14$ erhalten wir:

		3	4/4	4/6/6	7
max		2.69643	2.71780	2.71832	2.71822

Da ein 14-eckiges Polyeder mit Volumen 2.72098 existiert [s.(III,1)], können wir für das für $n = 14$ optimale Polyeder Ecken vom Grad 3, 7 und analogerweise Ecken höheren Grades ausschließen. Enthält das optimale Polyeder zwei Ecken vom Grad 4, so sind diese benachbart.

(8) Zur Erweiterung dieser Überlegungen betrachten wir noch zwei Dreiecke $\triangle APB$ und $\triangle BQA$ mit gemeinsamer Kante AB . Dabei sagen wir, daß sich die Ecken P und Q *seiten*; die entsprechenden Flächen des einfachen dualen Polyeders sind dann durch eine Kante verbunden.

Nun sei P vom Grad p und Q vom Grad q. Wir bezeichnen mit $2\varepsilon_1$ die Summe der Flächen von APB und BQA, mit ε_2 die Flächensumme der weiteren p-1 Dreiecke, die sich in P treffen, und mit ε_3 die Flächensumme der weiteren q-1 Dreiecke, die sich in Q treffen; 4α sei die Summe der Winkel $\angle APB$ und $\angle BQA$. Ersetzen wir jedes Dreieck um P bzw. Q durch ein flächengleiches gleichschenkeliges Dreieck mit demselben Winkel bei P bzw. Q, so vergrößern wir seinen Eckensinus. Das Volumen eines gleichschenkeligen Dreiecks ist als Funktion der Dreieckswinkel streng konkav und somit vergrößern wir die Volumenssumme von $\triangle APB$ und $\triangle BQA$ abermals, wenn wir diese Dreiecke durch kongruente Dreiecke mit Fläche ε_1 und Halbwinkel α an der Spitze ersetzen. Ebenso vergrößern wir die Volumenssumme der übrigen Dreiecke um P, wenn wir diese durch p-1 kongruente gleichschenkelige Dreiecke mit Fläche $\varepsilon_2/(p-1)$ und Halbwinkel $(\pi-\alpha)/(p-1)$ an der Spitze ersetzen. Analoges gilt für die übrigen Dreiecke um Q. Das Polyedermosaik enthält noch weitere $2n-4-(p+q)$ Dreiecke, deren Flächensumme $4\pi-(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ beträgt. Somit ist das Volumen des Polyeders kleiner oder gleich:

$$F_4 = 2 \cdot G(\alpha, \beta_1) + (p-1) \cdot G\left(\frac{\pi-\alpha}{p-1}, \beta_2\right) + (q-1) \cdot G\left(\frac{\pi-\alpha}{q-1}, \beta_3\right) + (2n-4-(p+q)) \cdot U\left(\frac{4\pi-(2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3)}{2n-4-(p+q)}\right),$$

Dabei ist $\varepsilon_1 = 2\alpha + 2\beta_1 - \pi$, und es ist

$$\varepsilon_2 = (p-1) \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi-\alpha}{p-1} + 2\beta_2 - \pi\right), \text{ sowie } \varepsilon_3 = (q-1) \cdot \left(2 \cdot \frac{\pi-\alpha}{q-1} + 2\beta_3 - \pi\right).$$

Wegen der strengen Konkavität von G und U ist F_4 streng konkav in $(\alpha, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ und besitzt daher ein eindeutiges Maximum. Für $n = 10$, $p = 4$ und $q = 6$ ist dieses $\approx 2.21696 < 2.21871$; für $p = 4$, $q = 6$ und $n = 14$ ist das Maximum von $F_4 \approx 2.72004 < 2.72098$. Somit darf sich bei dem für $n = 10$ und $n = 14$ optimalen Polyeder keine Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 6 seiten.

Seiten sich bei einem 11-eckigen Polyeder eine Ecke vom Grad k und eine Ecke vom Grad 7, so ist:

k		4	5	6	7
max		2.33054	2.35232	2.33538	2.29153

Da es ein 11-eckiges Polyeder mit Volumen 2.35463 gibt, können wir damit für das für $n = 11$ optimale Polyeder Ecken vom Grad 7 ausschließen. Denn jede Ecke E vom Grad 7 ist zu sieben weiteren Ecken benachbart und somit besitzt dann das Polyeder drei Ecken, die zu E nicht

benachbart sind. Diese Ecken sind vom Grad 4, 5, 6 oder 7, und zumindest eine von ihnen muß sich mit E seiten, aber dies konnten wir aber für das für $n = 11$ optimale Polyeder soeben ausschließen.

Seiten sich bei einem 13-eckigen Polyeder eine Ecke vom Grad k und eine Ecke vom Grad 7, so ist:

k		4	5	6	7
max		2.59247	2.61219	2.6053	2.57975

Damit können wir auch für das für $n = 13$ optimale Polyeder Ecken vom Grad 7 ausschließen, da ein 13-eckiges Polyeder mit Volumen 2.61283 existiert: Eine Ecke E vom Grad 7 ist zu sieben weiteren Ecken benachbart und zu fünf Ecken nicht benachbart. Diese Ecken sind vom Grad 4, 5, 6 oder 7 und zumindest eine von ihnen muß sich mit der Ecke vom Grad 7 seiten; dies ist aber, wie wir gesehen haben, bei dem für $n = 13$ optimalen Polyeder nicht möglich.