

IV. MORPHOLOGIE OPTIMALER POLYEDER

(1) Wir haben für n -eckige Polyeder, $6 \leq n \leq 14$, Strukturen gesucht, die das jeweilige optimale Polyeder nicht enthalten kann. Mit vollständigen Listen (einfacher) n -Fläche konnten wir dann für $6 \leq n \leq 9$ den Typus des optimalen Polyeders eindeutig bestimmen; bei $n = 10$ erhielten zwei Polyedertypen, die für das optimale Polyeder in Frage kommen. Nun suchen wir Polyedertypen für das optimale Polyeder, wenn $n = 11$ bzw. $n = 14$. Klarerweise können wir uns dabei auf Typen beschränken, die der Kugel einschreibbar sind, und die [s.(III.4)] zu einem Dreieckspolyeder gehören. Zu einem gegebenen Typus betrachten wir ein entsprechendes konvexes Polyeder, sowie dessen Mosaik auf der Kugeloberfläche. Wenn wir den Polyedertypus ändern, so stellen wir uns vor, nicht das Polyeder selber, sondern nur dessen Mosaik abzuändern, um Fragen der Existenz des Polyeders außer Acht lassen zu können.

Besitzt ein n -eckiges Polyeder p_k Ecken vom Grad k , so ist $p_3 + p_4 + p_5 + p_6 + p_7 + p_8 + \dots = n$ und die zweifache Anzahl seiner Kanten ist durch $3p_3 + 4p_4 + 5p_5 + 6p_6 + 7p_7 + 8p_8 + \dots = 6n - 12$ gegeben. Aus diesen Gleichungen folgt:

$$3p_3 + 2p_4 + p_5 - p_7 - 2p_8 - \dots = 12.$$

Da $p_k \geq 0$ besitzt jedes Polyeder Ecken vom Grad 3, 4 oder 5; und bei einem konvexen n -eckigen Dreieckspolyeder, das nur Ecken vom Grad 4, 5 oder 6 besitzt, ist

$$2p_4 + p_5 = 12 \text{ sowie } p_6 = n - (p_4 + p_5).$$

Ein n -eckiges Dreieckspolyeder mit u Ecken vom Grad 4, v Ecken vom Grad 5 und w Ecken vom Grad 6 werden wir im weiteren als $(n; u, v, w)$ -Polyeder bezeichnen.

Wir betrachten nun ein n -eckiges Dreieckspolyeder \mathbf{P} , und Q sei eine Ecke kleinsten Grades von \mathbf{P} ; weiters sei Q in zyklischer Reihenfolge zu A_1, A_2, A_3, \dots benachbart. Da jedes Polyeder Ecken vom Grad 3, 4 oder 5 besitzt, ist Q vom Grad $q = 3, 4$ oder 5 . Löschen wir Q und die von Q ausgehenden Kanten, so erhalten wir ein $(n-1)$ -eckiges Polyeder \mathbf{P}' , das eine Nicht-Dreiecksfläche besitzen kann. Dabei wird der Grad der Ecken A_i , $i = 1 \dots q$, um 1 verringert, und der Grad der übrigen Ecken des Polyeders bleibt unverändert. Enthält \mathbf{P}' eine Nicht-Dreiecksfläche, so zerlegen wir diese durch Diagonalen in Dreiecke. Dabei erhöht sich der Grad einer Ecke A_i um die Anzahl der neu gezogenen Kanten, die von A_i ausgehen.

Legen wir die Art der Diagonalisierung fest, so ist \mathbf{P}' eindeutig. Betrachten wir nun alle möglichen Diagonalisierungen, so ist \mathbf{P}' eindeutig, wenn $q = 3$. Ist $q = 5$,

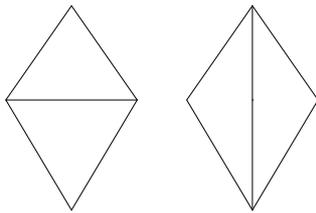


Abb. 5

so können wir \mathbf{P} auf fünf - zumeist unterschiedliche - Dreieckspolyeder \mathbf{P}' zurückführen. Ist $q = 4$, so gibt es zwei zumeist unterschiedliche Polyeder \mathbf{P}' , auf die wir \mathbf{P} zurückführen können. Deren Typen lassen sich durch das *Kreuzen einer Kante* ineinander überführen. Dieser Prozeß läßt sich so ausführen: Soll die Kante K eines Dreieckspolyeders gekreuzt werden, bestimmen wir die Dreiecke mit gemeinsamer Kante K und ersetzen K durch die Verbindung der Eckpunkte dieser Dreiecke, die nicht zu K gehören (Abb.5). Dieser Prozeß läßt sich nur dann nicht ausführen, wenn durch das Löschen von K eine Ecke vom Grad zwei entstünde.

Durch den Prozeß "Löschen einer Ecke vom Grad 4 und die von ihr ausgehenden Kanten sowie Triangulierung der entstandenen Vierecksfläche", den wir Σ_4 nennen wollen, wird der Grad von zwei gegenüberliegenden Ecken des Vierecks $A_1 \dots A_4$ um eins erniedrigt, der Grad der beiden anderen Ecken der Vierecksfläche wird nicht geändert. Σ_4 werden wir so symbolisieren:

$$\begin{array}{ccc} a & b+1 & \\ & 4 & \\ c+1 & d & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \text{ oder kürzer: } \begin{array}{ccc} a & b+1 & \\ c+1 & d & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}.$$

Durch das Kreuzen der Kante A_2A_4 wird der Grad von A_2 und A_4 eins erniedrigt und der von A_1 und A_3 um eins erhöht. Den Prozeß des Kreuzens werden wir so symbolisieren:

$$\begin{array}{ccc} a-1 & b+1 & \\ c+1 & d-1 & \end{array} \xleftrightarrow{K} \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}.$$

Ist Q vom Grad 5, so entsteht durch das Löschen von Q und der von Q ausgehenden Kanten ein Polyeder mit einer Fünfecksfläche $A_1 \dots A_5$. Durch das Triangulieren dieser Fünfecksfläche wird der Grad einer dieser Ecken um eins erhöht, der Grad der dazu benachbarten Ecken um eins erniedrigt, und der Grad der übrigen Ecken des Polyeders wird nicht geändert. Diesen Prozeß des Löschens und Triangulierens, den wir Σ_5 nennen wollen, werden wir im weiteren so symbolisieren:

$$\begin{array}{ccc} a & b+1 & \\ & 5 & \\ e & d+1 & \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc} a & b & \\ & c & \\ e & d & \end{array}.$$

(2) Mit diesen Prozessen wollen wir die Typen bestimmen, die für das für $n = 11$ optimale Polyeder \mathbf{P} in Frage kommen. Von diesem haben wir gezeigt, daß es nur Ecken vom Grad 4, 5 oder

6 besitzen kann, und wenn es ein Doppelviereck besitzt, so darf es keine weitere dazu nicht-benachbarte Ecke vom Grad 4 enthalten [s. **(II.1)**]. Da $2p_4 + p_5 = 12$ besitzt \mathbf{P} zumindest eine Ecke vom Grad 4, und daher können wir \mathbf{P} stets durch Σ_4 auf ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}' zurückführen, wobei wir die Triangulierung für Σ_4 geeignet wählen werden.

Kennen wir umgekehrt ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}' , so erhalten wir daraus ein 11-eckiges Polyeder \mathbf{P} mit einer neuen Ecke vom Grad 4, indem wir zwei benachbarte Dreiecke ABC, CBD auswählen, die gemeinsame Kante BC löschen, und die Ecken A, B, C, D mit einem Punkt E aus dem Inneren von ABCD verbinden. Diesen Prozeß nennen wir Π_4 , und wir sagen, daß durch Π_4 die Kante BC gelöscht wird.

Nun ist es offensichtlich, daß wir durch diesen Prozeß genau dasselbe Polyeder \mathbf{P} erhalten, wenn wir von einem Polyeder \mathbf{P}'' ausgehen, dessen Typus wir aus dem Typus des Polyeders \mathbf{P}' durch das Kreuzen von BC erhalten können. Wenn wir den Typus von \mathbf{P} bestimmen wollen, ist es also egal, ob wir \mathbf{P}' oder \mathbf{P}'' als "Ursprungspolyeder" betrachten, wenn beide Polyedertypen existieren.

Wenn wir die Triangulierung für Σ_4 fest vorgeben, so läßt sich daher jedes 11-eckige Polyeder \mathbf{P} in eindeutiger Weise auf ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}' zurückführen. Das bedeutet insbesondere, daß das Polyeder \mathbf{P} bzw. ein Polyeder diesen Typs nur dann existieren kann, wenn es ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}' gibt, auf das sich \mathbf{P} zurückführen läßt.

Um die Typen der 11-eckigen Polyeder zu bestimmen, die die oben genannten Bedingungen für das für $n = 11$ optimale Polyeder erfüllen, müssen wir die Typen aller 10-eckigen Polyeder bestimmen, die durch Σ_4 aus einem solchen Polyedertyp entstehen können. Dann müssen wir aber auch noch überprüfen, welche 11-eckigen Polyedertypen sich aus diesen 10-eckigen Polyedern durch Π_4 tatsächlich herleiten lassen. Dabei werden wir die vollständige Liste aller einfachen 10-Fläche dazu benutzen, die Eigenschaften der 11-eckigen Polyedertypen, die sich daraus herleiten lassen, zu untersuchen.

(3) Wir betrachten nun zunächst ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}' mit einer Ecke F vom Grad 3. Aus diesem Polyeder erzeugen wir durch Π_4 ein 11-eckiges Polyeder \mathbf{P} . Wird dabei durch Π_4 der Grad von F nicht erhöht, so erhalten wir stets ein 11-eckiges Polyeder mit einer Ecke vom Grad 3, das für $n = 11$ optimalen Polyeders kann aber keine Ecke vom Grad 3 besitzen. Der Grad von F wird durch Π_4 jedoch nur dann erhöht, wenn durch diesen Prozeß eine Kante gelöscht wird, die zwei Ecken verbindet, die beide zu F benachbart sind. Dabei wird aus F eine Ecke vom Grad 4, die zur

neu entstandenen Ecke vom Grad 4 benachbart ist, d.h. das 11-eckige Polyeder \mathbf{P} besitzt stets ein Doppelviereck.

Das Polyeder \mathbf{P}' darf nun keine weitere Ecke vom Grad 4 besitzen, die zur Ecke vom Grad 3 nicht benachbart ist, denn sonst enthielte \mathbf{P} ein Doppelviereck und eine dazu nicht-benachbarte Ecke vom Grad 4; aber das ist bei dem für $n = 11$ optimalen Polyeder nicht möglich. In dem zu \mathbf{P}' dualen Polyeder besitzt somit jede Vierecksfläche V eine Kante, an der V sich mit der Dreiecksfläche seitet, oder mit einer Dreiecksfläche verbunden ist. Daß aber jedes einfache 10-eckige Polyeder mit einer Dreiecksfläche auch eine Vierecksfläche besitzt, für die dieses nicht zutrifft, entnehmen wir der Brückner'schen Liste aller einfachen 10-Fläche [Abb. 6].

Besitzt das Polyeder \mathbf{P}' weitere Ecken vom Grad 3, so kann durch Π_4 nur dann daraus ein 11-eckiges Polyeder \mathbf{P} ohne Ecke vom Grad 3 entstehen, wenn \mathbf{P}' zwei Ecken A und D vom Grad 3 besitzt, die sich seiten. Sind B und C die Ecken des Polyeders, die sowohl zu A als auch zu D benachbart sind, so kreuzen wir die Kante BC. Dadurch wird der Grad von A und D erhöht, und der von B und C verkleinert. Ist der Grad von B sowie von C größer als 4, so erhalten wir stets ein 10-eckiges Polyeder \mathbf{P}'' ohne Ecke vom Grad 3. Da wir dann aus \mathbf{P}' sowie \mathbf{P}'' durch Π_4 dasselbe 11-eckige Polyeder erhalten, können wir o.B.d.A. den 10-eckigen Polyedertypus, bei dem sich zwei Ecken vom Grad 3 seiten, außer Acht lassen. Ist B jedoch vom Grad 4, so kann das Polyeder nicht zehn Ecken besitzen, denn B ist bereits zu A, D sowie zu C benachbart, und kann daher nur noch zu einer weiteren Ecke M des Polyeders benachbart sein. Diese Ecke des Polyeders muß jedoch auch zu A und zu D benachbart sein, denn sonst wäre \mathbf{P}' kein Dreieckspolyeder. Dann sind A und D aber bereits mit B, M und C verbunden. Nun ist A vom Grad 3, und da ein Dreieckspolyeder vorliegen soll, müssen auch C und M benachbart sein. Besitzt das Polyeder weitere Eckpunkte, so ist einer von ihnen zu M oder C benachbart, muß aber auch zu D benachbart sein, denn sonst könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen. Dann wäre aber D zumindest vom Grad 4; ist D vom Grad 3, so kann daher das Polyeder höchstens fünf Eckpunkte besitzen.

Somit können wir annehmen, daß \mathbf{P}' keine Ecken vom Grad 3 besitzt. Wir nehmen nun an, \mathbf{P}' besitze ein Doppelviereck ABCDEF und wählen für dieses die Bezeichnungen der Abb. 3. Wird aus \mathbf{P}' durch Π_4 ein 11-eckiges Polyeder \mathbf{P} erzeugt, so können folgende Fälle eintreten:

(a) Durch Π_4 wird keine Kante des Doppelvierecks gelöscht. Dann erhalten wir ein 11-eckiges Polyeder mit einem Doppelviereck und einer dazu nicht-benachbarten Ecke vom Grad 4, die durch Π_4 erzeugt wurde.

(b) Durch Π_4 wird eine Kante des Doppelvierecks gelöscht, die von C oder von D ausgeht. Da durch Π_4 der Grad dieser Ecke nicht geändert wird, erhalten wir ein 11-eckiges Polyeder mit einem (neuen) Doppelviereck.

(c) Durch Π_4 wird eine äußere Kante des Doppelvierecks gelöscht; das sind in der gewählten Bezeichnung die Kanten AB, BF, FE und EA. Dann entsteht durch Π_4 ein 11-eckiges Polyeder mit zumindest zwei nicht benachbarten Ecken vom Grad 4, denn eine wurde durch den Prozeß erzeugt, und der Grad von C oder D wurde nicht geändert.

Besitzt \mathbf{P}' zwei Doppelvierecke, so kann nur dann ein 11-eckiges Polyeder \mathbf{P} ohne Doppelviereck entstehen, wenn durch Π_4 eine gemeinsame Kante der Doppelvierecke gelöscht

wird. Im dualen Polyeder ist dies dann der Fall, wenn es eine Kante gibt, die Doppelvierecke verbindet, wenn wir im dualen Polyeder zwei Vierecksflächen mit gemeinsamer Kante als Doppelviereck bezeichnen. Daher können wir für \mathbf{P}' Polyeder vom Typus Nr. 77 - 81 sowie 83a der Brückner'schen Liste ausschließen, denn aus einem solchen Polyeder erhalten wir durch Π_4 stets ein 11-eckiges Polyeder mit einem Doppelviereck und einer dazu nicht-benachbarten Ecke vom Grad 4.

Bei einem Polyeder vom Typus Nr. 82 der Brückner'schen Liste gibt es zwei Kanten, die zu beiden Doppelvierecken des Polyeders gehören. Wird eine dieser beiden Kanten durch Π_4 gelöscht, so entsteht ein 11-eckiges Polyeder mit vier zueinander nicht benachbarten Ecken vom Grad 4, denn jedes Doppelviereck wird durch eine Struktur ersetzt, die zwei nicht-benachbarte Ecken vom Grad 4 besitzt. Wird durch Π_4 eine andere Kante des Polyeders gelöscht, so entsteht ein 11-eckiges Polyeder mit einem Doppelviereck und einer dazu nicht benachbarten Ecke vom Grad 4. Somit können wir für \mathbf{P}' auch diesen Polyedertyp ausschließen.

Wird bei einem Polyeder vom Typus Nr. 83b der Brückner'schen Liste durch Π_4 eine innere Kante des Doppelvierecks gelöscht, so entsteht ein Polyeder mit einem Doppelviereck und einer dazu nicht benachbarten Ecke vom Grad 4. Wird durch Π_4 eine äußere Kante des Doppelvierecks gelöscht, so entsteht ein 11-eckiges Polyeder mit vier zueinander nicht benachbarten Ecken vom Grad 4, es sei denn, durch Π_4 wird die Kante gelöscht, an der sich das Doppelviereck mit einer Ecke vom Grad 4 seitet. Im dualen Polyeder ist dies nur dann der Fall, wenn es eine Kante gibt, die ein Doppelviereck des dualen Polyeders mit einer Vierecksfläche verbindet. Kreuzen wir die entsprechende Kante des Dreieckspolyeders, so erhalten wir ein Polyeder vom Typ Nr. 84 der Brückner'schen Liste. Da wir dann durch Π_4 dasselbe Polyeder erhalten, können wir o.B.d.A. den Typus Nr. 83b der Brückner'schen Liste außer Acht lassen.

Wird bei einem Polyeder vom Typus Nr. 83c der Brückner'schen Liste durch Π_4 eine innere Kante des Doppelvierecks gelöscht, so entsteht ein Polyeder, das zwei Doppelvierecke besitzt. Wird durch Π_4 eine äußere Kante des Doppelvierecks gelöscht, so entsteht ein Polyeder mit einem Doppelviereck und zwei dazu nicht benachbarten Ecken vom Grad 4, es sei denn, durch Π_4 wird die Kante von \mathbf{P}' gelöscht, an der sich beide Doppelvierecke seitet. Kreuzen wir diese Kante, so erhalten wir jedoch ein Polyeder vom Typ Nr. 85 der Brückner'schen Liste, und analog zu den vorigen Überlegungen können wir o.B.d.A. auch den Typus Nr. 83c Brückner'schen Liste außer Acht lassen.

(4) Somit haben wir gesehen, daß wir uns bei der Suche nach einem 10-eckigen Polyeder P' , aus dem durch Π_4 ein 11-eckiges Polyeder P entstehen kann, dessen Typus für das für $n = 11$ optimale Polyeder in Frage kommt, auf Polyeder vom Typus Nr. 84 oder Nr. 85 der Brückner'schen Liste beschränken können. Diese Typen wollen wir nun genauer betrachten.

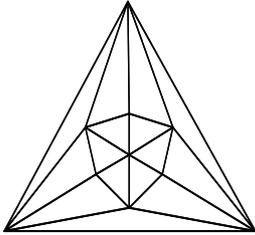


Abb. 7

Die Kanten eines Polyeders vom Typ Nr. 84 der Brückner'schen Liste [Abb.7] lassen sich in vier Gruppen einteilen. Die erste Gruppe besteht aus den zwölf Kanten, die von einer Ecke vom Grad 4 ausgehen, zur zweiten Gruppe gehören die drei Kanten, an denen sich zwei Ecken vom Grad 4 seiten, zur dritten gehören die drei Kanten, an denen sich zwei Ecken vom Grad 5 seiten, und die vierte Gruppe besteht aus den sechs Kanten, an denen sich eine Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 5 seitet. Die Kanten derselben Gruppe sind im topologischen Sinn zueinander kongruent; d.h. wir erhalten stets denselben Polyedertypus, egal welche Kante einer Gruppe durch Π_4 gelöscht wird. Dabei treten folgende Fälle auf:

Löschen wir durch Π_4 eine Kante der ersten Gruppe, das sind die Kanten, die von einer Ecke vom Grad 4 ausgehen, so bleibt diese Ecke vom Grad 4 bestehen, ist aber zur neu entstandenen Ecke vom Grad 4 benachbart. Somit entsteht durch Π_4 ein 11-eckiges Polyeder mit einem Doppelviereck und zwei dazu nicht benachbarten Ecken vom Grad 4. Dieses Polyeder kommt jedoch für $n = 11$ als optimales Polyeder nicht in Frage [s.o.].

Kreuzen wir eine Kante der zweiten Gruppe, das sind die Kanten, an der sich zwei Ecken vom Grad 4 seiten, so erhalten wir ein Polyeder vom Typ Nr. 85 der Brückner'schen Liste; daher reicht es in diesem Fall aus, ein Polyeder von dem genannten Typus zu betrachten.

Löschen wir durch Π_4 eine Kante der dritten Gruppe, das sind die Kanten, an denen sich zwei Ecken vom Grad 5 seiten, so entsteht eine neue Ecke vom Grad 4, aber der Grad der bereits bestehenden Ecken vom Grad 4 wird nicht geändert. Das neue Polyeder besitzt somit vier nicht-benachbarte Ecken vom Grad 4; dies kann bei dem für $n = 11$ optimalen Polyeder jedoch nicht der Fall sein .

Löschen wir zuletzt durch Π_4 eine Kante der vierten Gruppe, das sind die Kanten, an denen sich eine Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 5 seitet, so entsteht ein (11; 3,8,2)-Polyeder, dessen Typus für das für $n = 11$ optimale Polyeder in Frage kommt (Abb.8, rechts).

Zuletzt haben wir noch Polyeder vom Typ Nr. 85 der Brückner'schen Liste zu untersuchen. Diese sind vom Typ der in **(III.1)** beschriebenen antiprismatischen Doppelpyramide, und besitzen somit acht Kanten, die von einer Ecke vom Grad 4 ausgehen [erste Gruppe], acht Kanten, an denen sich eine Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 5 seitet [zweite Gruppe], und acht Kanten, an denen sich zwei Ecken vom Grad 5 seitet [dritte Gruppe]. Auch hier erhalten wir typengleiche Polyeder, wenn durch Π_4 eine Kante derselben Gruppe gelöscht wird.

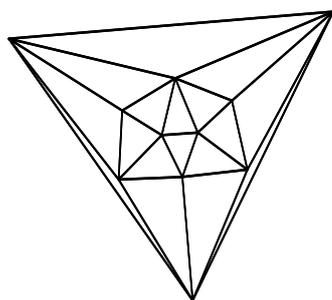
Wird durch Π_4 eine Kante gelöscht, die von einer Ecke E vom Grad 4 ausgeht, so ist die neu entstehende Ecke vom Grad 4 zu der bereits bestehenden Ecke E vom Grad 4 benachbart. Das Polyeder besitzt somit ein Doppelviereck und eine dazu nicht benachbarte Ecke vom Grad 4; sein Typus ist daher nicht der Typus des für $n = 11$ optimalen Polyeders.

Wird durch Π_4 eine Kante gelöscht, an der sich zwei Ecken vom Grad 5 seitet, so erhalten wir ein $(11; 3,8,2)$ -Polyeder, das zu dem bereits erhaltenen isomorph ist.

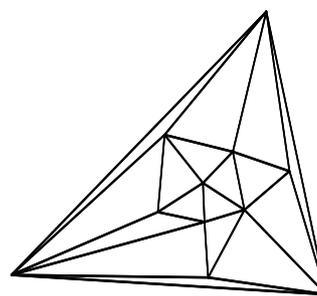
Wird zuletzt durch Π_4 eine Kante gelöscht, an der sich eine Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 5 seitet, so erhalten wir ein $(11; 2,10,1)$ -Polyeder, dessen Typus ebenfalls für das für $n = 11$ optimale Polyeder in Frage kommt.

Damit haben wir für das für $n = 11$ optimale Polyeder zwei mögliche Typen erhalten [Abb.8]. Weiters haben wir gezeigt, daß es nur ein $(11; 2,10,1)$ -Polyeder gibt, und daß es kein $(11; 1,10,0)$ -Polyeder geben kann.

Zu beiden Polyedertypen wurde das Polyeder mit dem größten Volumen näherungsweise bestimmt, dazu wurde der in **(III.4)** beschriebene Algorithmus verwendet. Somit ist das Volumen des für $n = 11$ optimalen Polyeders ≥ 2.35463 , und dieses Polyeder dürfte nur eine Ecke vom Grad 6 und somit zwei Ecken vom Grad 4 besitzen:



Volumen ≈ 2.35463



Volumen ≈ 2.32971

Abb. 8

(5) Wir haben gezeigt, daß das optimale Polyeder für $n = 14$ weder ein Doppelviereck noch zwei zueinander nicht benachbarte Ecken vom Grad 4 besitzen kann [s. (II.1) bzw. (I.7)]. Somit besitzt das für $n = 14$ optimale Polyeder höchstens eine Ecke vom Grad 4, die sich noch dazu nur mit Ecken vom Grad 5 seiten darf [s. (I.8)].

Diese Bedingungen sind bei einem $(14; 0,12,2)$ -Polyeder sicher erfüllt. Um alle Typen 14-eckiger Polyeder ohne Ecken vom Grad 4 zu bestimmen, betrachten wir zunächst ein $(14; 0,12,2)$ -Polyeder \mathbf{P} , bei dem eine Ecke W vom Grad 5 zu beiden Ecken vom Grad 6 benachbart ist. Dann ist diese Ecke in jedem Fall in zyklischer Reihenfolge zu einer Ecke A vom Grad 6 und zwei Ecken B bzw. C vom Grad 5 benachbart. Die beiden übrigen Ecken, die zu W benachbart sind, seien - in derselben zyklischen Reihenfolge - D und E . Eine dieser Ecken ist vom Grad 6, die andere ist - ebenso wie alle weiteren Ecken des Polyeders - vom Grad 5.

Die Ecke A des Polyeders kann nicht zur Ecke C benachbart sein, denn sonst wäre B höchstens vom Grad 3, ebenso sind A und D nicht zueinander benachbart. Daher muß A zu drei weiteren Ecken F , G bzw. H des Polyeders benachbart sein. Da wir nur 14-eckige Dreieckspolyeder untersuchen, ist einer dieser Punkte auch zu E und ein anderer auch zu B benachbart; dies seien F bzw. H [s. Abb. 9]

Abb. 9

Nun ist B bereits zu vier schon bekannten Ecken von \mathbf{P} benachbart. Ist B vom Grad 5, so kann B nur noch zu einer weiteren Ecke des Polyeders benachbart sein. Dies ist nicht G , denn sonst wäre H höchstens vom Grad 3, ebensowenig können B und D benachbarte Ecken des Polyeders sein. Sind B und F benachbarte Polyederecken, so müssen auch F und H benachbarte Polyederecken sein, denn sonst kann kein Dreieckspolyeder vorliegen; dann ist aber G höchstens vom Grad 3. Ebenso sind B und E nicht zueinander benachbarte Polyederecken, denn sonst müßten analog auch C und E zueinander benachbart sein, und D wäre dann nur vom Grad 3.

Somit ist B zu einer weiteren Ecke K des Polyeders benachbart, die ihrerseits zu H und zu C benachbart sein muß, denn sonst wäre B nicht vom Grad 5 oder **P** wäre kein Dreieckspolyeder.

Ebenso wie zuvor B ist nun C zu vier bereits bekannten Ecken des Polyeders benachbart. Weiters kann C nicht zu H oder E benachbart sein, denn sonst wäre K bzw. D höchstens vom Grad 3. Wären C und G oder C und F zueinander benachbart, so müßten auch K und G bzw. D und F zueinander benachbart sein, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder; dann wäre aber H bzw. E höchstens vom Grad 4. Somit ist C zu einer weiteren Ecke L des Polyeders benachbart, die ihrerseits zu K und zu D benachbart sein muß, denn sonst wäre C nicht vom Grad 5 oder **P** wäre kein Dreieckspolyeder. Das heißt: das Polyeder enthält die in Abb. 10 dargestellte Struktur.

Abb. 10

Von den bereits bekannten Polyederpunkten sind H und K bereits zu vier bekannten Polyederpunkten benachbart. Wäre K darüber hinaus zu G benachbart, so wäre H höchstens vom Grad 4, wäre K zu D benachbart, so wäre L vom Grad 3. Sind K und F zueinander benachbart, so müßten auch H und F zueinander benachbart sein, da ein Dreieckspolyeder vorliegen soll; dann wäre aber G höchstens vom Grad 3. Ebenso können K und E nicht zueinander benachbart sein, denn sonst wären auch L und E zueinander benachbart, und D wäre dann höchstens vom Grad 4.

Daher kann K zu einer noch nicht bekannten Ecke X des Polyeders benachbart sein, die wegen der Dreiecksstruktur des Polyeders auch zu L und H, und - da dann H bereits zu fünf Ecken des Polyeders benachbart ist - auch zu G benachbart sein muß. Somit enthält das Polyeder ein Kantenpolygon DEFGXL, bei dem in zyklischer Ordnung drei Ecken [K, X, L] vom Grad 5 aufeinanderfolgen, die bereits zu jeweils vier bereits bekannten Ecken des Polyeders benachbart sind:

Abb. 11

Wir betrachten nun die Ecke L des Polyeders. L kann nicht zu G oder E benachbart sein, denn sonst wäre X bzw. D höchstens vom Grad 4, ebenso sind auch L und F nicht zueinander benachbart, denn sonst wären wegen der Dreiecksstruktur des Polyeders auch D und F zueinander benachbart, aber dann wäre E höchstens vom Grad 4. Somit muß L zu einer bislang noch nicht bekannten Ecke Y des Polyeders benachbart sein, die wegen der Dreiecksstruktur des Polyeders auch mit X und D verbunden sein muß. Damit ist X zu fünf bereits bekannten Ecken von **P** benachbart, und somit muß Y auch zu G benachbart sein, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Damit ist aber auch G zu fünf bereits bekannten Ecken von **P** benachbart, und aus demselben Grund wie zuvor muß somit Y auch zu F benachbart sein. Dann ist aber auch die Ecke Y bereits zu fünf Ecken von **P** benachbart. Y ist aber lt. Voraussetzung vom Grad 5. Da das Mosaik von **P** nur aus Dreiecken bestehen soll, sind somit D und F benachbarte Ecken von **P**, doch damit ist letztendlich E höchstens vom Grad 4.

Dies widerspricht den getätigten Voraussetzungen, und daher kann es ein $(14; 0,12,2)$ -Polyeder, bei dem eine Ecke vom Grad 5 zu beiden Ecken vom Grad 6 benachbart ist, nicht geben.

Somit ist bei jedem $(14; 0,12,2)$ -Polyeder **P** jede Ecke vom Grad 5 höchstens zu einer Ecke vom Grad 6 benachbart. Wir betrachten nun eine Ecke W vom Grad 5, die zu einer Ecke A vom Grad 6 und - in zyklischer Reihenfolge - zu Ecken B, C, D und E vom Grad 5 benachbart ist. Nun können wir die Überlegungen, die wir im vorigen Fall verwendet haben, auf die Punkte A, B, C, D und E anwenden, und wir erhalten, daß **P** ein Kantenspolygon KLMNOP in der in Abb. 12 skizzierten Art enthält.

Abb. 12

Bei diesem Kantenpolygon sind L und M bereits zu einer Ecke vom Grad 5 benachbart (und zwar zu B), die zu einer Ecke vom Grad 6 benachbart ist; die Ecken L und M sind daher laut Voraussetzung vom Grad 5. Dasselbe gilt für die Punkte O und P.

Die Ecke K ist nicht vom Grad 6, denn sonst wäre L - eine Ecke vom Grad 5 - zu zwei Ecken vom Grad 6 benachbart. K ist somit vom Grad 5. Wären nun K und M oder K und O zueinander benachbart, so wäre L bzw. P höchstens vom Grad 4. Sind K und N zueinander benachbart, so müssen auch L und N oder P und N zueinander benachbart sein, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder; dann ist aber M bzw. O höchstens vom Grad 4.

Somit ist K zu zwei noch nicht bekannten Punkten X und Y des Polyeders benachbart, die ihrerseits zueinander benachbart sein müssen. Weiters ist einer dieser Punkte (dies sei X) zu L und der andere (dies sei Y) zu P benachbart, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Dann sind P und L bereits zu jeweils fünf schon bekannten Ecken des Polyeders benachbart, und sind X und O zueinander benachbart, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Da damit auch O zu fünf Ecken des Polyeders benachbart ist, müssen - aus demselben Grund wie zuvor - die Ecken X und N zueinander benachbart sein. Dieselben Überlegungen gelten für die Punkte Y, M und N, und daher sind Y und M sowie Y und N zueinander benachbart. Damit haben wir nun tatsächlich den Typus eines $(14; 0,12,2)$ -Polyeders gefunden; dieses ist vom Typ der in **(III.1)** besprochenen antiprismatischen Doppelpyramide. Aus unseren Überlegungen folgt weiters, daß jedes $(14;0,12,2)$ -Polyeder nur von diesem Typ sein kann.

(6) Wir haben bereits gezeigt, daß das für $n = 14$ optimale Polyeder höchstens eine Ecke E vom Grad 4 besitzt, die sich aber nur mit Ecken vom Grad 5 seiten kann [s. **(I.6,7)**, **(II,1)**]. Betrachten wir den Grad der Ecken, die zur Ecke vom Grad 4 benachbart sind, so treten folgende Fälle auf:

(a) E ist zu mindestens zwei Ecken vom Grad 6 benachbart, die auch zueinander benachbart sind.

(b) E ist zu zwei Ecken vom Grad 6 benachbart, die zueinander nicht benachbart sind.

(c) E ist nur zu einer Ecke vom Grad 6 benachbart

(d) E ist nur zu Ecken vom Grad 5 benachbart.

Wenn wir im ersten Fall die Kante kreuzen, die die beiden Ecken vom Grad 6 verbindet, so erhalten wir stets ein (14; 0,12,2)-Polyeder:

$$\begin{array}{ccc} 6 & 5 & \xleftarrow{K} 5 & 6 \\ 4 & 6 & & 5 & 5 \end{array}$$

Somit kann ein solches (14; 1,8,3)-Polyeder durch das Kreuzen einer entsprechenden Kante aus einem Polyeder vom Typus der 14-eckigen antiprismatischen Doppelpyramide erhalten werden. Dazu kommt aber nur eine Kante in Frage, an der sich eine Ecke vom Grad 6 mit einer Ecke vom Grad 5 seitet. Aus Symmetriegründen erhalten wir somit stets dasselbe (14; 1,8,3)-Polyeder, bei diesem seitet sich aber die Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 6.

Ist E zu zwei Ecken A und C vom Grad 6 benachbart, die zueinander nicht benachbart sind, so können diese auch auf anderem Wege nicht zueinander benachbart sein, denn sonst wäre E zu mindestens einer Ecke, und zwar B oder D, vom Grad 3 benachbart. Daher besitzt das Polyeder die Eckpunkte K, L, M, N, O, P in der in Abb. 13 angegebenen Form, denn P ist ein Dreieckspolyeder. [Um zu der Struktur von Abb. 13 zu gelangen, haben wir die Überlegungen der vorigen Untersuchungen sinngemäß verwendet].

Abb. 13

Da sich die Ecke vom Grad 4 nur mit Ecken vom Grad 5 seitet darf, sind K, M, N und P Ecken vom Grad 5. Dabei ist z.B. die Ecke M zu vier bereits bekannten Ecken des Polyeders benachbart;

somit kann M nur noch zu einer weiteren Ecke von **P** benachbart sein. Sind dabei M und O benachbarte Ecken, so ist N höchstens vom Grad 4, sind M und K zueinander benachbart, so kann L höchstens vom Grad 3 sein. Sind M und P zueinander benachbart, so müssen auch N und P zueinander benachbart sein, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Sind aber N und P zueinander benachbart, so ist O höchstens vom Grad 3. Daher kann M nur zu einem noch nicht bekannten Punkt X des Polyeders benachbart sein, der seinerseits wiederum mit L und N und, da damit N bereits zu fünf Punkten des Polyeders verbunden ist, mit O verbunden sein muß, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder.

Dieser Punkt X kann aber nicht zu K benachbart sein, denn sonst wäre L höchstens vom Grad 4. Weiters können auch K und O nicht zueinander benachbart sein, denn sonst wäre P höchstens vom Grad 4. Daher muß K zu einem noch nicht bekannten Punkt Y des Polyeders benachbart sein, der seinerseits wiederum mit L und P und, da damit P bereits zu fünf Punkten des Polyeders verbunden ist, mit O verbunden sein muß, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder.

Da das Polyeder bereits zwei Ecken vom Grad 6 besitzt, ist L oder O vom Grad 5. Daher müssen X und Y zueinander benachbart sein, denn sonst könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen. Damit sind aber sowohl X als auch Y jeweils bereits zu fünf Ecken des Polyeders benachbart, und eine der beiden Ecken ist vom Grad 5. Soll ein Dreieckspolyeder vorliegen, so kann dieses daher keinen weiteren Eckpunkt mehr enthalten; das vorliegende Polyeder besitzt aber nur 13 Eckpunkte [s. Abb. 14].

Abb. 14

Also kann der Fall, daß E zu zwei Ecken vom Grad 6 benachbart ist, nicht eintreten. Ist nun E zu einer Ecke vom A vom Grad 6 benachbart, so erhalten wir aus Überlegungen analog zu denen in vorigen Absatz, daß das Polyeder die in Abb. 15 dargestellte Struktur besitzen muß.

Abb. 15

Nun sind die Ecken K, M, P und Q vom Grad 5, denn sonst würde sich die Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 6 seiten. Ist nun P zu L oder K benachbart, so ist M bzw. Q höchstens vom Grad 4; daher kann P zu einer noch unbekanntem Ecke X des Polyeders benachbart sein. Diese Ecke ist wiederum zu M und Q und, da dann diese Ecken zu bereits fünf Ecken des Polyeders benachbart sind, zu K und L benachbart, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Da dann auch K zu bereits fünf Ecken des Polyeders benachbart ist, kann der bislang 11-eckigen Polyederstruktur kein weiterer Eckpunkt mehr hinzugefügt werden, ohne eine getroffene Voraussetzung zu verletzen.

Ist zuletzt E zu vier Ecken A, B, C, D vom Grad 5 benachbart, und seitet sich E mit den Ecken K, L, M, N vom Grad 5, so enthält **P** analog zu obigen Überlegungen die in Abb. 16 skizzierte Struktur:

Abb. 16

Ist nun K zu P benachbart, so sind M und Q höchstens vom Grad 4. Daher muß K zu einer noch nicht bekannten Ecke X des Polyeders benachbart sein. Diese ist aber auch zu N und L benachbart, denn sonst wäre **P** kein Dreieckspolyeder. Da dann aber L und N bereits zu fünf

Punkten des Polyeders benachbart sind, muß aus demselben Grund X auch zu Q benachbart sein. Das Polyeder besitzt dann zwar nur 10 Eckpunkte, kann jedoch keinen weiteren Eckpunkt mehr besitzen, denn sonst wäre K , L , M oder N zumindest vom Grad 6.

Nun haben wir alle Fälle untersucht, die bei einem $(14; 1,10,3)$ -Polyeder \mathbf{P} auftreten können, wenn sich die Ecke vom Grad 4 nur mit Ecken vom Grad 5 seiten darf, und wir haben gesehen, daß es kein solches Polyeder geben kann. Daher ist der Typus der antiprismatischen Doppelpyramide der einzige Typus, den das für $n = 14$ optimale Polyeder besitzen kann.

(7) Mit unseren Methoden ließen sich auch die Polyedertypen bestimmen, die für das optimale Polyeder in Frage kommen, wenn $n = 13$. Da die dazu nötigen Untersuchungen jedoch sehr aufwendig werden, begnügen wir uns damit, nachzuweisen, daß es nur ein $(13; 1,10,2)$ -Polyeder gibt. Daß es kein $(13; 0,12,1)$ -Polyeder geben kann, ist leicht einzusehen [*s.auch* [29]].

Ist bei diesem die Ecke vom Grad 4 nur zu Ecken vom Grad 5 benachbart, so enthält es die in Abb. 17 gezeigte Struktur:

Abb. 17

Da das Polyeder nur zwei Ecken vom Grad 6 besitzt, können die Ecken K und M nicht zueinander benachbart sein, denn sonst wäre L oder N auf jeden Fall höchstens vom Grad 4. Weiters können wir o.B.d.A. annehmen, K sei vom Grad 5. Aus obiger Überlegung folgt, daß K zu einer noch nicht bekannten Ecke X des Polyeders benachbart ist, die ihrerseits zu L und N benachbart sein muß, denn sonst könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen.

Ist nun auch L vom Grad 5, so muß aus demselben Grund X auch zu M benachbart sein. Ist nun M ebenfalls vom Grad 5, so kann das Polyeder keinen weiteren Eckpunkt mehr enthalten, da M bereits zu fünf Eckpunkten des Polyeders benachbart ist und da ein Dreieckspolyeder vorliegen soll. Ist M vom Grad 6, so ist dieser Eckpunkt aus demselben Grund zu einer noch nicht bekannten Ecke Y des Polyeders benachbart; die Ecke Y ist weiters zu N und zu X benachbart, denn sonst

könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen. Da dann N bereits zu sechs Ecken des Polyeders benachbart ist, kann dieses keinen weiteren Eckpunkt mehr enthalten, und daher ist in diesem Fall Y höchstens vom Grad 3 und X höchstens vom Grad 4.

Dieselben Überlegungen gelten, wenn der Grad von N fünf beträgt. Daher müssen L und N Ecken vom Grad 6 und M eine Ecke vom Grad 5 sein. L und N können aber nicht zueinander benachbart sein, denn sonst wäre M höchstens vom Grad 4 und die Ecke X , die zu K benachbart ist, wäre höchstens vom Grad 3. Daher ist L zu einer noch nicht bekannten Ecke Y des Polyeders benachbart, die ihrerseits wiederum zu M und, da dann M bereits zu fünf Ecken des Polyeders benachbart ist, zu N benachbart sein muß, denn sonst könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen. Dann ist aber D bereits zu sechs Ecken des Polyeders benachbart ist, und daher müssen X und Y zueinander benachbart sein, denn sonst könnte kein Dreieckspolyeder vorliegen. Dann kann aber die vorliegende Polyederstruktur um keinen Eckpunkt mehr erweitert werden; die Ecken X und Y sind aber höchstens vom Grad 4, und bilden zudem ein Doppelviereck.

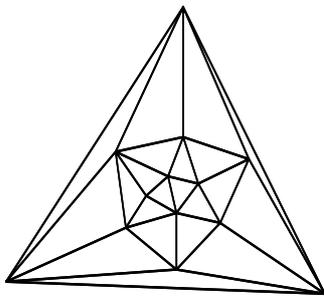
Da keiner der Fälle eintreten kann, die möglich sind, wenn bei einem $(13; 1,10,2)$ -Polyeder \mathbf{P} die Ecke vom Grad 4 nur zu Ecken vom Grad 5 benachbart ist, muß die Ecke vom Grad 4 zu mindestens einer Ecke vom Grad 6 benachbart sein. Da \mathbf{P} nur zwei Ecken vom Grad sechs enthält, muß es ein Kantenfünfeck im Mosaik des Polyeders geben, bei dem in zyklischer Reihenfolge die Ecke vom Grad 4 mit einer Ecke vom Grad 6 und einer Ecke vom Grad 5 aufeinander folgen, und das durch zwei Kanten, die von der Ecke vom Grad 6 ausgehen, in drei Dreiecke des Mosaiks zerlegt wird [s. Abb. 18, links]. Löschen wir diese beiden Kanten, wählen wir einen Punkt im Inneren des Kantenspolygons und verbinden wir diesen mit den Eckpunkten des Polygons, so erhalten wir aus dem 13-eckigen Polyeder \mathbf{P} ein $(14; 0,12,2)$ -Polyeder:

Abb. 18

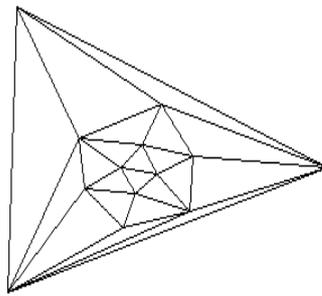
Somit läßt sich jedes $(13; 1,10,2)$ -Polyeder durch Π_5 auf ein Polyeder vom Typ der 14-eckigen antiprismatischen Doppelpyramide zurückführen. Da bei dieser jede Ecke vom Grad 5 zu genau einer Ecke vom Grad 6 benachbart ist, erhalten wir aus Symmetriegründen durch den umgekehrten Prozeß stets dasselbe 13-eckige Polyeder. Somit kann es nur ein $(13; 1,10,2)$ -Polyeder geben; dessen Struktur hatten wir bereits in Abb. 14 skizziert.

Wir konnten zeigen, daß das für $n = 13$ optimale Polyeder ein Doppelviereck besitzt; zwei nicht-benachbarte Ecken vom Grad 4 konnten wir allerdings nicht ausschließen. Mit genauen Falluntersuchungen ließe sich nun zeigen, daß es zwei $(13; 2,8,3)$ -Polyeder gibt, bei dem jede Ecke vom Grad 6 zu einer Ecke vom Grad 4 benachbart ist, und die daher für das $n = 13$ optimale Polyeder in Frage kommen.

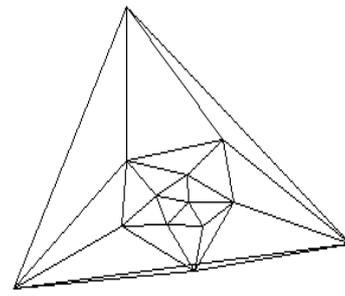
Somit ist das für $n = 13$ optimale Polyeder wahrscheinlich von einem der folgenden Typen:



Volumen ≈ 2.61283



Volumen ≈ 2.57646



Volumen ≈ 2.56801

Abb. 18

Auch hier wurde für jeden Polyedertypus das Polyeder mit dem maximalen Volumen näherungsweise bestimmt, und das Volumen des für $n = 13$ optimalen Polyeders ist ≥ 2.61283 .

(8) Viktor Eberhard [12, § 4-6] konnte einen fundamentalen Satz beweisen, aus dem folgt, daß sich der Typus eines beliebigen n -eckigen Dreieckspolyeders durch sukzessives Kreuzen von Kanten in den Typus eines jeden anderen n -eckigen Dreieckspolyeders überführen läßt, wenn beide Typen existieren.

Daher können wir den Prozeß des Kantenkreuzens dazu benutzen, Polyeder mit möglichst großem Volumen zu finden, die der Einheitskugel einbeschrieben sind und deren Eckenanzahl vorgegeben ist. Durch den in (III.6) beschriebenen Algorithmus können wir zu einem gegebenen Typus T ein Polyeder mit möglichst großem Volumen, das "beste Polyeder des Typus", bestimmen.

Dann gehen wir so vor: Zu einem Polyedertypus T bestimmen wir das beste Polyeder \mathbf{P} , dessen Kanten wir numerieren. Wir kreuzen die Kante mit der Nummer Eins, und erhalten einen neuen Polyedertypus. Enthält dieser eine Ecke vom Grad 2, d.h. erhalten wir einen "ungültigen Polyedertypus", so gehen wir zurück zu T und kreuzen dessen nächste Kante, bis wir einen Polyedertypus T' erhalten, der keine Ecke vom Grad 2 besitzt. Zu diesem bestimmen wir das beste Polyeder \mathbf{P}' . Hat dieses ein größeres Volumen wie \mathbf{P} , so ersetzen wir T durch T' und beginnen den Prozeß von neuem; ist das Volumen von \mathbf{P}' kleiner oder gleich dem Volumen von \mathbf{P} , so gehen wir zurück zu T , kreuzen dessen nächste Kante und starten den Prozeß von neuem.

Dieser Prozeß endet bei einem Polyedertypus T'' mit bestem Polyeders \mathbf{P}'' , bei dem das Kreuzen einer beliebigen Kante stets zu einem Typus führt, dessen bestes Polyeder ein Volumen besitzt, das stets kleiner oder gleich ist dem von \mathbf{P}'' . Wir notieren das Volumen, die Inzidenzmatrix, und die Koordinaten der Eckpunkte von \mathbf{P}'' , wählen eine Seite von \mathbf{P}'' aus und errichten über deren Schwerpunkt eine Pyramide mit Spitze auf der Kugeloberfläche. Dadurch erhalten wir ein $(n+1)$ -eckiges Polyeder mit größerem Volumen als \mathbf{P}'' , mit dem wir den beschriebenen Prozeß von neuem starten. Da wir durch das Aufsetzen einer Pyramide aus jedem n -eckigen Polyeder ein $(n+1)$ -eckiges mit größerem Volumen erhalten, ist weiters die Folge der Volumina der optimalen Polyeder streng monoton wachsend.

Um diesen Algorithmus zu beschleunigen, ist es zweckmäßig, nur die Lage der vier Eckpunkte zu verändern, deren Grad durch den Kreuzungsalgorithmus geändert wurde. Dadurch können zwar Polyedertypen, deren bestes Polyeder ein noch größeres Volumen besitzt, übersehen werden; die Rechenzeit wird jedoch erheblich verringert.

Das Kapitel 5 enthält den Quelltext eines Mathematica-Programms, das diesen Algorithmus implementiert, das Kapitel 6 enthält die Ergebnisse des Programmes. Dabei werden zu jedem Polyeder sein Volumen, seine Inzidenzmatrix und die Koordinaten seiner Eckpunkte angegeben.

Für $10 \leq n \leq 14$ ermittelt das Programm die in dieser Arbeit behandelten Polyeder und Polyedertypen. Für $n \geq 14$ erhalten wir nur Polyeder, die Ecken vom Grad 5 und 6 besitzen; diese Polyeder sind zu den sogenannten "Buckminster-Fullerenen" dual. Dies dürfte kein Zufall sein; eine entsprechende Vermutung für das isoperimetrische Problem wurde 1939 von M. Goldberg [23] ausgesprochen.

Um das Volumen eines Polyeders \mathbf{P} nach oben abzuschätzen, können wir es in Ecken vom Grad k zerlegen, wobei wir jedes Mosaikdreieck dreimal zählen. Das Volumen jeder Ecke vom Grad k wird dann durch das Volumen der entsprechenden flächengleichen, regulären Ecke vom Grad k

nach oben abgeschätzt. Für ein $(n; 0,12,n-12)$ -Polyeder erhalten wir folgende obere Abschätzung für das Volumen:

$$V \leq \frac{1}{3} \cdot (12 \cdot P(5, x) + (n - 12) \cdot P(6, y)) =: B, \text{ wobei } 12 \cdot x + (n-12) \cdot y = 12 \cdot \pi.$$

Diese Funktion ist zwar streng konkav und besitzt daher eine eindeutige Maximalstelle, ihr Maximalwert ist aber nicht ohne weiteres explizit bestimmbar, muß also für jedes n neu berechnet werden.

B.Grünbaum und T.S.M Motzkin fanden einen Algorithmus, der es ermöglicht, für jedes $n \geq 14$ ein $(n; 0,12,n-12)$ -Polyeder zu konstruieren. Ihr Konstruktionsalgorithmus ist einfach zu implementieren und liefert brauchbare, aber nicht besonders gute Polyeder. Eine schnelle und zuverlässige Methode, für festes n alle möglichen Polyedertypen zu ermitteln, bei denen nur Ecken vom Grad 5 und 6 vorkommen, wurde von G.Brinkmann und A.Dress ([9] bzw. [10]) entwickelt, die mir dankenswerterweise ihren Algorithmus zur Verfügung gestellt haben. Ihren Algorithmus mit dem hier vorgestellten zu verbinden wäre eine lohnende Aufgabe für weitere Forschungsarbeiten, insbesondere deshalb, weil es damit möglich sein sollte, für beliebiges n das entsprechende optimale Polyeder hinreichend genau zu approximieren.

(9) Es ist zu erwarten, daß unter den Polyedern, die nur Ecken vom Grad 5 und Grad 6 besitzen, diejenigen ein besonders großes Volumen aufweisen, die sich durch Unterteilung des Ikosaeders erhalten lassen (s.[49],[51],[52]) und daher ikosaedrische Symmetrie besitzen (s.[35]). Dazu seien folgende Beispiele erwähnt:

$n = 32$: Wir bilden die konvexe Hülle der Ikosaederecken und der Radialprojektionen der Mittelpunkte der Ikosaederflächen. Dadurch gelangen wir zu einem Polyeder, das zu einem halbregulären Polyeder (dem "Fußball") dual ist. Dieses Polyeder läßt sich in 12 Ecken vom Grad 5 zerlegen, und sein Volumen ist daher maximal, wenn diese regulär und zueinander kongruent sind. Somit besteht das beste Polyeder diesen Typs aus 60 kongruenten Dreiecken mit den Winkeln $(2\pi/5, \pi/3, \pi/3)$; sein Volumen beträgt $2/3 \cdot \sqrt{10\sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 1)} \approx 3.50487$.

$n = 42$: Die Ecken des Ikosaeders werden durch die Radialprojektion der Kantenmittelpunkte ergänzt. Die konvexe Hülle dieser Punktmenge besitzt sechzig gleichschenkelige Dreiecke mit Schenkel $a = \arccos 1 / (2 \cdot \sin \pi/5)$ und Winkel $2\pi/5$ an der Spitze, sowie zwanzig gleichseitige Dreiecke mit Seiten der Länge b , $\cos b = \cos^2 a + \sin^2 a \cdot \cos \frac{2\pi}{5}$. Sein Volumen ist gegeben durch:

$$\sqrt{\frac{5 \cdot \sqrt{5} \cdot (\sqrt{5} - 1)}{2}} + \frac{5}{6} \cdot (\sqrt{5} - 1) \approx 3.65871.$$

$n = 72$: In jeder Dreiecksfläche des Ikosaeders befinde sich ein gleichseitiges Dreieck, und wir bestimmen die konvexe Hülle der Dreiecks- und der Ikosaedereckpunkte. Das gleichseitige Dreieck sei dabei so gedreht, daß die konvexe Hülle nur aus gleichseitigen oder gleichschenkeligen Dreiecken besteht. Dieses Polyeder besitzt zwölf reguläre Ecken vom Grad 5, sechzig gleichschenkelige Dreiecke, die sich an die Dreiecke der regulären Ecken anschließen, sowie zwanzig gleichseitige Dreiecke. Das Volumen des Polyeders ist von zwei Variablen abhängig und besitzt einen Maximalwert von ≈ 3.87686 .

$n = 92$: Die Kanten des Ikosaedermosaiks werden in drei Teile geteilt und wir betrachten die konvexe Hülle \mathbf{P} der Menge, die aus den Ikosederecken, den Teilungspunkte und den Flächenmittelpunkten besteht. Es läßt sich zeigen, daß das Volumen von \mathbf{P} dann größtmöglich ist, wenn die Dreiecke im Inneren der Ikosaederfläche gleichseitig sind. Das maximale Volumen von \mathbf{P} beträgt ≈ 3.94371 .

Die erhaltenen Resultate sind in der folgenden Tabelle zusammengefaßt. Dabei befinden sich in der Spalte "B-M" die maximalen Volumina der Polyeder der Grünbaum-Motzkin-Konstruktion, in der Spalte "axial" Volumina axialsymmetrischer Anordnungen, in der Spalte "prg" Volumina der Polyeder, die in dieser Arbeit behandelt oder durch das oben beschriebene Programm ermittelt wurden; in der fünften Spalte befinden sich die Werte der zuvor beschriebenen oberen Schranke.

n	B-M	axial	prg	schr
5			0.86603	
6			1.33333	
7			1.58509	
8			1.81572	
9		1.79305	2.04375	
10		2.21871	2.21871	
11			2.35463	
12		2.46696	2.53615	
13			2.61283	
14	2.72098	2.56810	2.72098	2.73861
15	2.78780	2.44167	2.80438	2.82300
16	2.85079	2.83681	2.88645	2.89841
17	2.92318	2.91381	2.94752	2.96616
18	2.99041	2.99750	3.00477	3.0273
19	3.02597		3.06321	3.08275
20	3.11232	3.11465	3.11854	3.13323
21	3.14160		3.16444	3.17938
22	3.17052	3.16133	3.19763	3.22172
23	3.20030	3.24036	3.24694	3.26069
24	3.23225	3.24223	3.27787	3.29668
25	3.24915		3.30484	3.33001
26	3.30027	3.32440		3.36096
27	3.31389	3.19487		3.38978
28	3.32855			3.41667
29	3.34289			3.44182
30	3.35915	3.43390		3.46540
31	3.36696			3.48754
32	3.40345	3.48474	3.50487	3.50837
42	3.48506	3.63821	3.65871	3.66688
72	3.58996	3.83760	3.87686	3.87933
92	3.61043		3.94245	3.94540

Tabelle 1